I.G.N.O.U. *Based*

NEERAJ®

M.E.C.-3/103

परिमाणात्मक विधियाँ

(Quantitative Techniques)

By: *Prieti Gupta*, M.Sc

Question Bank** Cum **Chapterwise Reference Book
Including **Many Solved Question Papers**

NEERAJ PUBLICATIONS
(Publishers of Educational Books)
(An ISO 9001 : 2008 Certified Company)

Sales Office:
1507, 1st Floor, Nai Sarak, Delhi - 6
Ph.: 011-23260329, 45704411, 23244362, 23285501
E-mail: info@neerajignoubooks.com
Website: www.neerajignoubooks.com

MRP ₹ 300/-

Published by:

NEERAJ PUBLICATIONS

Sales Office : **1507, 1st Floor, Nai Sarak, Delhi-110 006**
E-mail: **info@neerajignoubooks.com**
Website: **www.neerajignoubooks.com**

	Typesetting by: ***Competent Computers***	*Printed at:* ***Novelty Printer***

Notes:

1. *For the best & up-to-date study & results, please prefer the recommended textbooks/study material only.*
2. *This book is just a Guide Book/Reference Book published by NEERAJ PUBLICATIONS based on the suggested syllabus by a particular Board/University.*
3. *The information and data etc. given in this Book are from the best of the data arranged by the Author, but for the complete and up-to-date information and data etc. see the Govt. of India Publications/textbooks recommended by the Board/University.*
4. *Publisher is not responsible for any omission or error though every care has been taken while preparing, printing, composing and proof reading of the Book. As all the Composing, Printing, Publishing and Proof Reading, etc. are done by Human only and chances of Human Error could not be denied. If any reader is not satisfied, then he is requested not to buy this book.*
5. *In case of any dispute whatsoever the maximum anybody can claim against NEERAJ PUBLICATIONS is just for the price of the Book.*
6. *If anyone finds any mistake or error in this Book, he is requested to inform the Publisher, so that the same could be rectified and he would be provided the rectified Book free of cost.*
7. *The number of questions in NEERAJ study materials are indicative of general scope and design of the question paper.*
8. *Question Paper and their answers given in this Book provide you just the approximate pattern of the actual paper and is prepared based on the memory only. However, the actual Question Paper might somewhat vary in its contents, distribution of marks and their level of difficulty.*
9. *Any type of ONLINE Sale/Resale of "NEERAJ IGNOU BOOKS/NEERAJ BOOKS" published by "NEERAJ PUBLICATIONS" on Websites, Web Portals, Online Shopping Sites, like Amazon, Flipkart, Ebay, Snapdeal, etc. is strictly not permitted without prior written permission from NEERAJ PUBLICATIONS. Any such online sale activity by an Individual, Company, Dealer, Bookseller, Book Trader or Distributor will be termed as ILLEGAL SALE of NEERAJ IGNOU BOOKS/NEERAJ BOOKS and will invite legal action against the offenders.*
10. *Subject to Delhi Jurisdiction only.*

NEERAJ PUBLICATIONS

(Publishers of Educational Books)

(An ISO 9001 : 2008 Certified Company)

1507, 1st Floor, NAI SARAK, DELHI - 110006

Ph. 011-23260329, 45704411, 23244362, 23285501

E-mail: **info@neerajignoubooks.com** *Website:* **www.neerajignoubooks.com**

CONTENTS

परिमाणात्मक विधियाँ
(Quantitative Techniques)

Question Bank – (Previous Year Solved Question Papers)

S.No. **Chapterwise Reference Book** *Page*

■■

Sample Preview of the Solved Sample Question Papers

Published by:

NEERAJ PUBLICATIONS
www.neerajbooks.com

QUESTION PAPER
(June – 2019)

(Solved)

परिमाणात्मक विश्लेषण विधियाँ

समय : 3 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 100*

नोट : *प्रत्येक भाग से निर्देशानुसार प्रश्न हल करें।*

भाग–क

इस भाग से *कोई दो* प्रश्न हल करें।

प्रश्न 1. एक कीमत विभेदक एकाधिकारी तीन बाजारों में कार्य करता है, जहाँ उसके समक्ष, क्रमशः ये तीन माँग वक्र हैं–

$P_1 = 63 - 4Q_1$

$P_2 = 105 - 5Q_2$

$P_3 = 75 - 6Q_3$

जहाँ $Q_1 = Q_2 - Q_3 = Q$ (अर्थात कुल उत्पादन)

उसका लागत फलन है– $C = 20 + 15Q$

तीनों बाजारों में बेची गई मात्राएं Q_1, Q_2, Q_3, वहां वसूली गई कीमतें तथा एकाधिकारी का कुल लाभ आकलित करें।

उत्तर–एकाधिकारी के कुल लाभ हैं–

$$TR(Q_1) = 63Q_1 - 4Q_1^2$$
$$TR(Q_2) = 105\,Q_2 - 5Q_2^2$$
$$TR(Q_3) = 75Q_3 - 6Q_3^2$$

कुल लागतें हैं–

$$TC = 20 + 15\,Q$$
$$= 20 + 15\,(Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

सीमान्त राजस्व यह दर्शाता है–

$$MR(Q_1) = 63 - 8Q_1$$
$$MR(Q_2) = 105 - 10Q_2$$
$$MR(Q_3) = 75 - 12\,Q_3$$

अतः कुल लागत से,

$$MC = 15.$$
$$MR = MC$$
$$MR(Q_1) \Rightarrow 63 - 8Q_1 = 15.$$
$$Q_1 = 6$$
$$MR(Q_2) \Rightarrow 105 - 8Q_2 = 15$$
$$Q_2 = 9$$
$$MR(Q_3) = MC = 75 - 12\,Q_3 = 15$$
$$\Rightarrow Q_3 = 5.$$
$$\text{So } P_1 = 63 - 24 = 39$$
$$P_2 = 105 - 45 = 60$$
$$P_3 = 75 - 30 = 45.$$

इस प्रकार एकाधिकारी के लाभ की मात्रा है–

$$= TR(Q_1 + Q_2 + Q_3) - TC.$$
$$= 999 - 320$$
$$= 679.$$

प्रश्न 2. *(a)* एक रैखिक प्रथम कोटि अवकलन समीकरण लिखें और सामान्य हल आकलित करें।

उत्तर–संदर्भ–देखें अध्याय-8, पृष्ठ 52, 'प्रथम क्रम समीकरणों के हलों का व्यवहार', 'सामान्य हल'

***(b)* अवकलन समीकरण के माध्यम से हैरड-डोमर के स्थैर्यपूर्ण संवृद्धि प्रतिमान को हल करने के सोपान निरूपित करें।**

उत्तर–संदर्भ–देखें अध्याय-7, पृष्ठ 45, 'स्थिर वृद्धि का हैरोर-डोमर विश्लेषण'

प्रश्न 3. *(a)* यदि $\bar{x}$ प्रतिदर्श औसत है, तो सिद्ध करें कि $\bar{x}$ का प्रत्याशित मान $E(\bar{x})$ समष्टि के औसत μ के समान होगा।

उत्तर–संदर्भ–देखें अध्याय-19, पृष्ठ 159, 'प्रसामान्यता प्राक्कल्पना के अनुसार परीक्षण प्रक्रिया'

***(b)* किसी लक्षण विशेष के समष्टि में अनुपात के विषय में अवधारणा की जाँच की प्रक्रिया का वर्णन करें।**

उत्तर–संदर्भ–देखें अध्याय-19, पृष्ठ 156, 'आगणकों के अभिलक्षण'

प्रश्न 4. एक पायजो आबंटन क्या होता है? इसके मुख्य अभिलक्षण स्पष्ट करें। किसी ऐसी समस्या का उदाहरण दे जहाँ आप पायजो आबंटन का प्रयोग कर सकते हैं।

उत्तर–संदर्भ–देखें अध्याय-16, पृष्ठ 136, 'पॉइसो बंटन', पॉइसो बंटन के गुणधर्म'

इसे भी देखें–पॉइसो बंटन का प्रयोग निम्नलिखित समस्याओं में कर सकते हैं–

- जन्म दोष और आनुवंशिक परिवर्तन।
- कार दुर्घटनाएं।
- यातायात प्रवाह और आदर्श खाई दूरी।
- एक पेज पर टाइपिंग त्रुटियों की संख्या।
- एक महीने में एक-एक मशीन की विफलता।

हाँ, इसका प्रायिकता घनत्व फलन होता है। μ एक निश्चित समय अंतराल में किसी क्षेत्र में होने वाली सफलताओं की औसत संख्या है, तो माध्य और वितरण दोनों μ के बराबर है।

$E(x) = \mu$

और

$V(x) = \sigma^2 = \mu$

उदाहरण–एक जीवन बीमा विक्रेता प्रति सप्ताह औसतन 3 जीवन बीमा पॉलिसियां बेचता है, पॉइसो का इस्तेमाल करके कि वह औसतन एक सप्ताह में कुछ पॉलिसी को बेच पायेगा,

यहाँ पर $\mu = 3$

वह कुछ पॉलिसी का मतलब 1 अथवा एक से ज्यादा से है।

अब माध्य के साथ पॉइसो की प्रायिकता ज्ञात करेंगे,

$$P(x > 0) = 1 - P(x_o)$$

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$P(x_0) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!}$$

$$= 4.9787 \times 10^{-2}$$

अत: एक और 1 से ज्यादा पालिसी की प्रायिकता

$$P = P(x \geq 0)$$
$$= 1 - P(x_0)$$
$$= 1 - 4.9787 \times 10^{-10}$$
$$= .95021$$

भाग–ख

इस भाग से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर लिखें–

प्रश्न 5. एक रैखिक प्रोगामन समस्या इस प्रकार है–

max $z = 30x_1 + 50x_2$

subject to : $x_1 + x_2 \geq 9$

$x_1 + 2x_2 \geq 12$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

इसके अभीष्ट समाधान आकलित करें।

उत्तर–Max $z = 30x, + 50x_2$

Subject to $x_1 + x_2 \geq 9$

$x_1 + 2x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

Max $Z = 30x, + 50x_2 + OS_1 + OS_2 - MA_1 - MA_2$

$x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 9$

$x_1 + 2x_2 - S_2 + A_2 = 12$

		C_j	30	50	0	0	– M	– M	
B	C_B	x_B	x_1	x_2	S_1	S_2	A	A_2	
A_1	–M	9	1	1	–1	0	1	0	9
A_2	–M	12	1	2	0	–1	0	1	6
Z= – 21M		z_1	–2M	–3M	M	M	–M	–M	
		$c_g - 2_j$	2M+30	30m+50	–M	–M	0	0	

अधिकतम धनात्मक मान $C_j - Z_j$ में 3M + 50 और मुख्य तत्व 2 है,

न्यूनतम अनुपात = 6

पंक्ति सूचकांक = z. और धुरी तत्त्व 2 होगा।

Sample Preview
of
The Chapter

Published by:

NEERAJ
PUBLICATIONS
www.neerajbooks.com

परिमाणात्मक विश्लेषण विधियाँ
(Quantitative Analysis Techniques)

अंतरक गणन विधि : विषय प्रवेश
(DIFFERENTIAL CALCULUS: INTRODUCTION)

फलन, सीमांत और सातत्य
(Functions, Limit and Continuity)

1

परिचय

अर्थशास्त्र से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए गणितीय ज्ञान एवं तकनीक ने सदैव ही महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई है। इस अध्याय में फलन, सीमांत और सातत्य की संकल्पनाओं के बारे में चर्चा की गयी है, किंतु अधिक गहराई में न जाकर हम इन संकल्पनाओं को वास्तविक संख्याओं एवं अनानुपातिक संख्याओं के दायरे में रखकर इन पर विचार-विमर्श करेंगे। फलन को सूत्र द्वारा, समाकलन विधि एवं ग्राफ विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। सातत्य, फलन का एक महत्त्वपूर्ण गुणधर्म होता है। किन परिस्थितियों में फलन का सीमांत सतत होता है? इत्यादि पर इस अध्याय में चर्चा की गई है।

अध्याय का विहंगावलोकन

मूल संकल्पनाओं का पुनरावलोकन

समुच्चय–स्पष्ट एवं सुपरिभाषित वस्तुओं के संकलन को समुच्चय कहते हैं तथा संकलित वस्तुएँ समुच्चय का अवयव कहलाती हैं।

उदाहरण–10 से कम सम पूर्णांकों का समुच्चय

S : $\{2x \mid x$ एक पूर्णांक है और $2x < 10\}$

इसके अवयव हैं $\rightarrow (2, 4, 6, 8)$

चर–किसी भी संख्या को निरूपित करने के लिए हम चर का उपयोग करते हैं। इसे अंग्रेजी के अक्षरों द्वारा दर्शाया जाता है। जैसे $x, y, a, b,$ आदि। चरों का मान विभिन्न परिस्थितियों में भिन्न होता है।

किसी संख्या a से b तक तक सभी संख्या मानों के लिए चर x को **सतत चर** कहते हैं। अर्थात

यदि $a \leq x \leq b$ या $x \notin [a, b]$ किसी चर के सभी संभव मानों का समुच्चय **प्रांत** होता है एवं **परिसर** ऐसे मानों का समुच्चय होता है, जो $f(x)$ ले सकता है।

अचर–पूरी गणितीय संक्रिया के दौरान यदि कोई निरूपण एक ही संख्यात्मक मान बनाए रखता है, तो उसे **अचर** कहते हैं। उदाहरण के लिए $|x|$ का मान धनात्मक और ऋणात्मक संख्या के लिए सदैव समान ही रहता है। अर्थात

$$|x| = x \text{ यदि } x \geq 0$$
$$= -x \text{ यदि } x < 0$$

उदाहरण $\quad |-5| = 5$ और $|5| = 5$

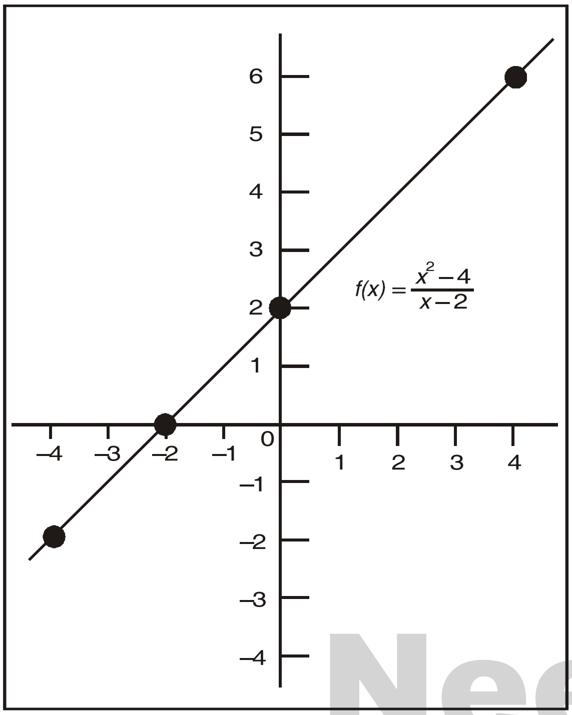
फलन

एक दूसरी राशि y के लिए x का फलन अपने प्रांत में x के लिए एक निश्चित रूप से परिभाषित होता है। इसमें चर x स्वतंत्र चर तथा y पराश्रयी चर कहलाता है।

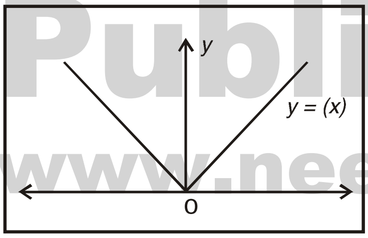
उदाहरण–फलन $f(x) = 20x - 5x^2$, x के प्रत्येक मान के लिए परिभाषित है, जबकि x एक वास्तविक संख्या है अर्थात इस फलन का प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

फलन का आलेख–किसी फलन $y = f(x)$ का आलेख बनाने के लिए, परिभाषित प्रांत x के अनुरूप y का मान ज्ञात करने की आवश्यकता होती है।

उदाहरण–फलन $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ का आलेख निम्न प्रकार है–



उदाहरण–$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ यदि } x \geq 0 \\ -x \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$



परिबंधित फलन व उनके परिबंधन–अंतराल (a, b) में परिभाषित किसी फलन $f(x)$ के लिए यदि कोई शून्येतर संख्या इस प्रकार है कि

$$f(x) \leq p$$

अत: p फलन का उच्च परिबंधन होता है। इसी प्रकार अन्य शून्येतर संख्या q यदि इस प्रकार है कि

$$f(x) \geq q$$

इसमें q निम्न परिबंधित होता है। दोनों प्रकार के परिबंधनों की उपस्थिति में $f(x)$ को परिबंधित कहा जाता है।

उदाहरण– $f(x) = x + 5; x \notin (-1,1)$

उच्च परिबंधन = 4

निम्न परिबंधन = 6

एकरूप फलन–एक प्रकार से घटने और बढ़ने को एकरूप फलन कहते हैं। वास्तविक संख्याओं x और y के लिए यदि $x \leq y$ का फलन $f(x) \leq f(y)$ है, तो फलन एकरूप कहलाता है।

फलन $f(x) = x - 1$ और $f(x) = \frac{1}{x}$ एकरूप फलन है।

प्रतिलोम फलन–यदि दो फलन f और f^{-1} इस प्रकार हैं कि $f: a \to b$, तो $f^{-1}; b \to a$ तो f^{-1}, f का प्रतिलोम फलन कहलाता है। यदि $f(x) = y$, तो $f^{-1}(y) = x$, $f(x)$ का प्रतिलोम फलन कहलाता है।

फलन के प्रकार

1. बीजगणितीय फलन–वे फलन जिनमें किसी दी गयी संख्या में विभिन्न पद प्रमुख गणितीय संक्रियाओं, जैसे–जोड़, घटा, गुणा अथवा भाग को प्रयुक्त करके संलग्नित होते हैं, बीजगणितीय फलन कहलाते हैं। अचर फलन, बहुपद इत्यादि बीजगणितीय फलन होते हैं।

***(i)* अचर फलन**–एक ही अवयव वाले परिसर का फलन अचर फलन कहलाता है।

***(ii)* बहुपद फलन**–$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ...a_n$ के रूप वाला फलन बहुपद फलन कहलाता है। जबकि n एक धनात्मक वास्तविक संख्या है और $a_0, a_1, a_2 ....$ स्थिर राशि है। उदाहरण– $5x^3 - 6x^2 + 4x - 2$, बहुपद फलन है।

रेखीय फलन का आलेख एक सीधी रेखा है जबकि द्विघात फलन का आलेख परवलय होता है। बहुपद फलन आनुपातिक फलन भी होता है। आनुपातिक फलन $xy = a$ के आलेख को आयताकार परवलय के रूप में आलेखित किया जाता है।

2. गैर-बीजगणितीय फलन–वे फलन जो बीजगणितीय नहीं होते, गैर-बीजगणितीय फलन कहलाते हैं। घातीय लघुगुणकीय एवं त्रिकोणमितीय फलन गैर-बीजगणितीय फलन के उदाहरण हैं।

सीमांत की अवधारणा

फलन की सातत्यता, सीमांत की अवधारणा के द्वारा परिभाषित की जाती है। जैसे ही x, a की ओर अभिमुख होता है, फलन $f(x)$ का सीमांत l होता है। इसे निम्न प्रकार से दर्शाया गया है–

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

उपर्युक्त वाक्यांश का अर्थ है कि जैसे-जैसे x एक अचर राशि a पर पहुँचता है (किन्तु $x \neq a$), वैसे ही $f(x)$ भी l राशि के समीप पहुँचता है।

उदाहरण–

$$\lim_{x \to -2} f(x) \text{ जबकि } f(x) = \begin{cases} -3x \text{ यदि } x \neq -2 \\ 1 \text{ यदि } x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} -3x$$

$$= -3 \lim_{x \to -2} x$$

$$= -3(-2) = 6$$

***(a)* फलन का दायाँ सीमांत**–फलन के दाएँ सीमांत से तात्पर्य है कि x एक अचर राशि a के अधिक मानों से a की ओर बढ़ता है। इसे निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है–

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ अथवा } \lim_{x\to a+0} f(x)$$

***(b)* फलन का बायाँ सीमांत**–फलन के बाएँ सीमांत से तात्पर्य है कि x एक अचर राशि a के कम मानों से a की ओर बढ़ता है। अर्थात

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ अथवा } \lim_{x\to a-0} f(x)$$

फलन के सीमांत का अस्तित्व रखने के लिए फलन के दाएँ सीमांत और बाएँ सीमांत का अस्तित्व में एवं समान रूप से होना अनिवार्य है। इसका अर्थ यह है कि

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x)$$

उदाहरण 1. ज्ञात कीजिए क्या $\lim_{x\to 0} f(x)$ अस्तित्व रखता है, यदि

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

हल–यहाँ $f(x)$, $x = 0$ के लिए परिभाषित नहीं है। $x < 0$ के लिए $|x| = -x$, तो

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

$x > 0$ के लिए $|x| = x$, तो

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$$

यहाँ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

अतः यह सिद्ध होता है कि $\lim_{x\to 0} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 2. यदि $(x) = \begin{cases} x-[x], \text{ यदि } x<3 \\ 7-2x, \text{ यदि } x>3 \end{cases}$, तो ज्ञात कीजिए कि क्या $\underset{x\to 3}{lm} f(x)$ का अस्तित्व है अथवा नहीं।

हल–फलन का बायाँ सीमांत निकालने पर

$(x < 3), f(x) = x - [x]$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x - [x])$$
$$= \lim_{x\to 3^-} x - \lim_{x\to 3^-}[x]$$
$$= 3 - 2 = 1$$

फलन का दायाँ सीमांत निकालने पर $(x > 3)$, $f(x) = 7 - 2x$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (7-2x)$$
$$= 7 - 2 \times 3$$
$$= 1$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$$

अतः $\lim_{x\to 3} f(x)$ का अस्तित्व है।

***(c)* अनंत की ओर प्रवृत्त फलन**–अनंत की ओर प्रवृत्त फलन के सीमांत को परिभाषित करने के लिए हम वास्तविक रेखा R को इस प्रकार बढ़ाते हैं कि $R\cup\{-\infty, \infty\}$। यदि $f(x)$ कोई वास्तविक फलन है, तो x के अनंत की ओर अभिमुख होने को निम्न प्रकार से दर्शाते हैं–

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

केवल और केवल सभी $\varepsilon > 0$ के लिए $S > 0$ इस प्रकार होता है कि $1 f(x) - L | \angle \varepsilon$, जबकि $x < S$

इसी प्रकार ऋणात्मक अनंत की ओर अभिमुख होने पर

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L,$$

सभी $\varepsilon > 0$ के लिए $S > 0$ इस प्रकार होता है कि $f(x) - L | < \varepsilon$, जबकि $x < S$

उदाहरण– $\qquad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

***(d)* सीमांत पर आधारित प्रमेय**

माना, $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ और $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$,

1. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = l_1 \pm l_2$
2. $\lim_{x\to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = l_1 . l_2$
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} (l_2 \neq 0)$
4. $\lim_{x\to a} [c\, f(x)] = c. \lim_{x\to a} f(x)$
5. यदि $h(x) = c$, तो $\lim_{x\to a} (x) = c$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} c = c$

6. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
7. $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$
8. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

9. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

13. $\lim_{x\to 0} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ (जबकि $a > 0$)

उदाहरण–

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$

$= \lim_{x\to 1} (x+1)$

$= 1 + 1 = 2 \{\because x \to 1$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(5\times\frac{\sin 5x}{5x}\right)$

$= 5\times \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$

$= 5 \times 1 = 5$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x}.2$

माना $y = 2x$, तो

$= \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}.2$

$= 1.2 = 2 \{\because \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1\}$

सातत्य

फलन $f(x)$, बिंदु $x = a$ पर सतत होता है, यदि

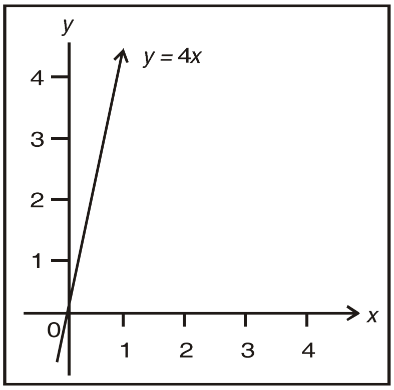
(i) $f(a)$ पूर्णतः परिभाषित हो।

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है।

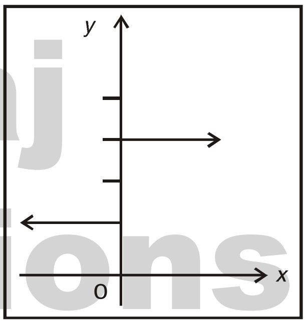
किसी बिंदु पर सतत न होने की स्थिति में फलन को उस बिंदु पर असातत्य रखने वाला कहा जाता है। यदि f और g_1 $x = a$ पर सतत है तो $f \pm g, fg$ और f/g $(g(a) \neq 0)$ भी $x = a$ पर सतत होते हैं।

एक बहुपद फलन $y = p(x)$, x के प्रत्येक बिंदु पर सतत होता है।

उदाहरण 1. $y = 4x$ का आलेख यह प्रदर्शित करता है कि x के प्रत्येक बिन्दु पर यह फलन सतत है।



उदाहरण 2. यदि $y = f(x) = \begin{cases} 3, & x > 0 \\ 1, & x \le 0 \end{cases}$ तो फलन $x = 0$ पर असातत्य है।



सतत फलनों के कुछ गुणधर्म

1. दो सतत फलनों का योग, अंतर व गुणनफल किसी भी शून्येतर संख्या के लिए एक सतत फलन होता है।

2. दो सतत फलनों का भागफल सतत होता है, बशर्ते उस बिन्दु पर हर का मान शून्य न हो।

3. यदि फलन, मुक्त अंतराल (a, b) के प्रत्येक बिंदु पर सतत है, तो फलन को सतत ही कहा जाएगा।

4. किसी अंतराल में सतत फलन, उस अंतराल के उच्च और निम्न परिबंधन प्राप्त कर लेता है।

उदाहरणतः फलन $\sin^{-1} x$ और $\cos^{-1} x$, $[-1,1]$ अंतराल में सतत है।

इसी प्रकार फलन $\sec^{-1} x$ और $\text{cosec}^{-1} x_1$ अंतराल $(-\infty, -1] \cup [-1, 1]$ में सतत हैं।

बोध-प्रश्न

प्रश्न 1. चर व अचर के बीच अंतर सोदाहरण स्पष्ट करें।