I.G.N.O.U. Based

NEERAJ®

M.E.C.E.-001

अर्थमिति विधियाँ

(Econometric Methods)

By: *Manish Kumar*

Question Bank** Cum **Chapterwise Reference Book

***Including* Many Solved Question Papers**

NEERAJ PUBLICATIONS

(Publishers of Educational Books)

(An ISO 9001 : 2008 Certified Company)

Sales Office:
1507, 1st Floor, Nai Sarak, Delhi - 6
Ph.: 011-23260329, 45704411, 23244362, 23285501
E-mail: info@neerajbooks.com
Website: www.neerajbooks.com

MRP ₹ 280/-

Published by:

NEERAJ PUBLICATIONS

Sales Office : **1507, 1st Floor, Nai Sarak, Delhi-110 006**

E-mail: **info@neerajbooks.com**

Website: **www.neerajbooks.com**

Typesetting by: ***Competent Computers*** | *Printed at:* ***Novelty Printer***

NEERAJ PUBLICATIONS

(Publishers of Educational Books)

(An ISO 9001 : 2008 Certified Company)

1507, 1st Floor, NAI SARAK, DELHI - 110006

Ph. 011-23260329, 45704411, 23244362, 23285501

E-mail: **info@neerajbooks.com** *Website:* **www.neerajbooks.com**

CONTENTS

अर्थमिति विधियाँ
(Econometric Methods)

Question Bank – (Previous Year Solved Question Papers)

S.No.	***Chapterwise Reference Book***	*Page*

मूल अर्थमिति सिद्धान्त
(Basic Econometric Theory)

■ ■

Sample Preview of the Solved Sample Question Papers

Published by:

NEERAJ PUBLICATIONS

www.neerajbooks.com

QUESTION PAPER

(June – 2019)

(Solved)

अर्थमिति विधियाँ

(Econometric Methods)

समय : 3 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 100*

***नोट :** प्रत्येक भाग से निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर लिखिए।*

भाग क

नोट : इस भाग से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रश्न 1. विषम विचालिता से आप क्या समझते हैं? समझाइए कि किसी प्रतीगमन प्रतिमान में आप विषम विचालिता की पहचान कैसे करेंगे? विषम विचालिता समस्या के उपचारात्मक समाधान क्या हैं?

उत्तर-संदर्भ देखें अध्याय-8, पृष्ठ 86, 'परिचय', 'प्रभाव', पृष्ठ 90, प्रश्न 4

प्रश्न 2. आप युगपत समीकरण तन्त्र की पहचान से क्या समझते हैं? निम्न प्रतिमान में इस पहचान का आकलन कीजिए

$\mathbf{C_t = a_0 + a_1 + Y_t + u_1}$

$\mathbf{L_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + t_4 Z_2 + u_2}$

$\mathbf{Y_t = C_t + L_t + G_t}$

(यहाँ C, Y, I अंतर्वर्ती चर हैं।)

उत्तर-संदर्भ देखें अध्याय-13, पृष्ठ 142, प्रश्न 6

इसे भी देखें उपभोग फलन

$C_t = a_0 + a_1 Y_t + u_1 \quad 0 < a_1 < 1$ ....*(i)*

कर फलन

$I_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_2$ ....*(ii)*

व्यय योग्य आय

$Y_t = C_t + I_t + G_t$ ....*(iii)*

सरकारी व्यय

$G_t = \bar{G}$ ....*(iv)*

यहा r राष्ट्रीय आय को, C उपयोग व्यय को, I निवेश को, G सरकारी व्यय को प्रदर्शित करता है।

$Y_t = C_t + I_t + G_t$

समीकरण *(i)*, *(ii)* व *(iv)* का मान समीकरण *(iii)* में रखने पर

$Y_t = a_0 + a_1 Y_t + u_1 + b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + u_2 + \bar{G}$

यदि उपरोक्त समीकरण को पुन: व्यवस्थित करें, तो निम्न समीकरण को प्राप्त करते हैं।

$Y_t = \pi_0 + \pi_t r$

$$\pi_0 = \frac{a_0 + a_1 Y_t + b_0 + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1} + \bar{G}}{1-(a_1+b_1)Y_t.}$$

$$\pi_t = \frac{1}{1-(a_1+b_1)Y_t}$$

व्यय राष्ट्रीय आय Y पर निर्भर करेगा और π_t में प्रवेश करता है, जो r और G पर निर्भर करता है।

प्रश्न 3. इस प्रतीपगमन समीकरण पर विचार कीजिए

$\mathbf{y_i = \alpha + \beta x_i + u_1}$

यहाँ u_i त्रुटि पद है।

(क) प्रतिमान में त्रुटि पद u_i सम्मिलित करने की आवश्यकता समझाइए।

(ख) गॉस-मार्कोव प्रमेय को सिद्ध करने के लिए त्रुटि पद के विषय में क्या मान्यताएँ आवश्यक हैं?

(ग) β के अनुमानक के लिए गॉस-मार्कोव प्रमेय सिद्ध कीजए।

उत्तर-(क) दिया गया प्रतीपगमन समीकरण

$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$

जहाँ, y और x के मध्य में रेखीय सम्बन्ध है।

जो त्रुटि का मान शून्य होता है,

$E(\mu) = 0$

इन सभी मान्यताओं में μ (त्रुटि पद) के औसत शून्य होते हैं, क्योंकि स्थिर प्रसरण σ^2 होते हैं, जो त्रुटि पद पर एक-दूसरे से असहसम्बन्धित होते हैं।

(ख) गॉस-मार्कोव प्रमेय हेतु निम्न मान्यताएँ आवश्यक है

(i) x और y के बीच रेखीय सम्बन्ध हो,

(ii) त्रुटि का मान शून्य हो,

$E = (\varepsilon) = 0$

(iii) अवलोकनों के लिये त्रुटि पद प्रसरण स्थिर हो

$E = (\varepsilon^2) = 0$

(iv) ε_1 सांख्यिकीय रूप से स्वतंत्र हो

$E = (\delta_i \varepsilon_j) = 0$

(v) x अयादृच्छिक चर है, जिसका मान निश्चित होता है, x के लिये त्रुटि पद असहसम्बन्धित होता है

$E(x_i \varepsilon_i) = 0$, जहाँ $i = 1, 2, ...n.$

(ग) $\hat{\beta}$ एक सर्वोत्तम रेखीय अनभिनत आगणक है, जो कि $\hat{\beta}$, β का एक अनभिनत रेखीय आगणक है। यदि y पर व्यक्तिगत अवलोकनों के भारित औसत के रूप में हो तो

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i(x_i + \varepsilon_j)}{\sum x_i^2}$$

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_1$$

$$= \beta \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} + \frac{\sum x_i \varepsilon_i}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i \varepsilon_i}{\sum x_i} \quad ....(i)$$

$$\sum(\hat{\beta}) = \beta\,\beta \qquad \text{चूँकि } E(\varepsilon_j) = 0$$

प्राचल (β) एक स्थिर अंक है, इसलिये $E(\beta) = \beta$ है, x_i स्थिर होता है,

$$E\left(\frac{\sum x_i \varepsilon_i}{\sum x_i^2}\right) = \frac{\sum x_i(\varepsilon_i)}{\sum x_i^2} = 0$$

यदि $= \sum(\beta^*) = \beta$ शर्तें पूरी करता है, तो

$$\sum d_i x_i = 0$$

β^* के प्रसरण पर अध्ययन करते हैं, तो

$$\sigma^2_{\beta^*} = E(\beta^* - \beta)^2$$

$$= E(\sum c_i \varepsilon_i)^2$$

$$= \sigma^2 \sum c_i^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} + \sigma^2 \sum d_i^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\hat{\beta}} + \sigma^2 \sum d_i^2$$

$\sigma^2_{\beta^*}$ का मान $\sigma^2_{\hat{\beta}}$ के बराबर अथवा अधिक है, अत: सभी रेखीय अनभिनत आगणकों में $\hat{\beta}$ का प्रसरण कम होता है। अत: निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि $\hat{\beta}$ एक सर्वोत्तम रेखीय अनभिनत आगणक है।

प्रश्न 4. मान लीजिए कि निर्भर चर Y_i केवल दो मान धारण करता है; 0 और 1. मान लीजिए कि X_i स्वतंत्र चरों का समूह है, जिनमें से कुछ सतत हैं। आप X_i के Y_i प्रभाव का अध्ययन करने के लिए एक रैखिक प्रायिकता प्रतिमान का निर्माण कर रहे हैं, जो हैं, $Y_i = X_i + \varepsilon_i$ जहाँ ε_i को इस प्रकार मानकीकृत किया गया है कि इसका माध्य शून्य है।

(क) दर्शाइए कि प्रत्येक X_i के लिए त्रुटि ε_i केवल दो मान धारण कर सकती है।

(ख) दर्शाइए कि $Var(\varepsilon_i | X_i)$ अर्थात् X_i हेतु ε_i का विचरण $X_i\beta(1 - X_i\beta)$ है।

(ग) इस प्रतिमान में X_i के लिए $Y_i = 1$ की प्रायिकता को [0, 1] अंतराल तक सीमित क्यों नहीं किया जाता?

हल (क) दिया गया रैखिक प्रायिकता प्रतिमान

$$y_i = X_i \beta + \varepsilon_i$$

जहाँ पर $i = 0, 1$ हो तो

$$y_1 = X_1\beta_1 + \varepsilon_1 + \beta_0$$

और $y_2 = X_2\beta_1 + \varepsilon_2 + \beta_0$

$$S(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{2}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

उपरोक्त फलन का आकलन करने पर

$$\frac{\partial S(y_1, y_2)}{\partial y} = -2\sum_{i=1}^{2}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

अत: β_0 और β_1 हेतु प्राप्त मान

Sample Preview
of
The Chapter

Published by:

NEERAJ PUBLICATIONS

www.neerajbooks.com

अर्थमिति विधियाँ
(ECONOMETRIC METHODS)

मूल अर्थमिति सिद्धान्त
(Basic Econometric Theory)

अर्थमिति का परिचय
(Introduction to Econometrics)

1

परिचय

वर्तमान समय में अर्थमिति का महत्त्व अत्यधिक बढ़ गया है। अर्थमिति अर्थशास्त्र की एक ऐसी शाखा के रूप में उभरी है, जो आर्थिक सिद्धान्तों के सत्यापन से सम्बन्धित है। अर्थमिति के सैद्धान्तिक पक्ष भी हैं तथा व्यवहारिक पक्ष भी हैं। वर्तमान में सैद्धान्तिक अर्थमिति में कई आकलन तकनीकों तथा परीक्षण परिगणकों को विकसित किया गया है। अर्थमिति के विभिन्न पहलुओं को जानना वर्तमान में अति आवश्यक हो गया है। हाल के वर्षों में सैद्धान्तिक विकास का अर्थमिति में बहुत तेजी से विकास हुआ है। अर्थमिति अर्थशास्त्र के आर्थिक मापों से संबंधित है। इसका प्रयोग अर्थमितीय प्रतिमानों के पूर्वानुमानों में भी किया जाता है।

प्रस्तुत अध्याय अर्थमिति के परिचय से संबंधित है। इस अध्याय में निम्नलिखित विषयों की व्याख्या की गई है अर्थमिति की प्रकृति या स्वरूप, प्रायिकता वितरण, असतत प्रायिकता वितरण, सतत प्रायिकता वितरण, प्रतिचयन आबंटन, सांख्यिकीय अनुमति या निष्कर्ष, आकलन, परिकल्पना परीक्षण तथा अर्थमिति विश्लेषण के लिए सॉफ्टवेयर पैकेज।

अध्याय का विहंगावलोकन

अर्थमिति की प्रकृति या स्वरूप

अर्थमिति का संबंध आर्थिक मापों से है। अर्थमिति को आर्थिक प्रक्रियाओं के सिद्धान्त तथा निष्कर्ष की विधियों पर आधारित विश्लेषण के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। अर्थमिति परिमाणात्मक विश्लेषण से सम्बन्धित है और यह तर्क पर आधारित है तथा इसमें निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए विधियों की आवश्यकता होती है। आर्थिक चरों में परिवर्तन की व्याख्या अन्य चरों में परिवर्तन के रूप में की जाती है। जैसे माँग के नियम के अनुसार जब कीमतें बढ़ती हैं, तो मांग में कमी होती है। ज्ञान या अनुभव में अन्तर के कारण विभिन्न व्यक्ति एक ही प्रक्रिया की व्याख्या भिन्न-भिन्न ढंग से कर सकते हैं। कुछ आर्थिक संबंध अध्ययनों के द्वारा प्रमाणित और पुष्ट हो चुके हैं। तर्क को अवलोकन द्वारा अनुमोदन की आवश्यकता होती है। अर्थशास्त्र की विषय-सामग्री का एक प्रमुख लाभ यह है कि इसमें आर्थिक चरों का परिणाम निश्चित किया जा सकता है।

गणितीय अर्थशास्त्र आर्थिक सिद्धान्त को गणितीय रूप में प्रस्तुत करता है, जबकि अर्थमिति आर्थिक सिद्धान्त के सत्यापन से संबंधित है। आर्थिक सांख्यिकी आंकड़ों के संग्रह, प्रसंस्करण और प्रस्तुतीकरण की व्याख्या से सम्बन्धित है। सांख्यिकी प्रायिकता नियमों तथा प्रतिचयन आबंटन परिकल्पना की जांच में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है। अर्थमिति का एक महत्त्वपूर्ण उपयोग अर्थमितीय प्रतिमानों के आधार पर पूर्वानुमान करना है। अर्थमिति प्राचलों का आकलन करके पूर्वानुमान तैयार करने में सहायता करती है। यह नीति विश्लेषण में भी सहायक है।

अर्थमिति अध्ययन के विभिन्न चरण इस प्रकार हैं अर्थमिति में सबसे पहले परिकल्पना का निरूपण किया जाता है। परिकल्पना आर्थिक सिद्धान्त पर आधारित होती है। दूसरे चरण में परिकल्पना का गणितीय समीकरण में रूपान्तरण किया जाता है। तीसरे चरण में आंकड़ों को एकत्रित किया जाता है। चौथे चरण में अर्थमितीय प्रतिमानों के प्राचलों का आकलन किया जाता है। अगले चरण में परिकल्पना का परीक्षण किया जाता है। अंतिम चरण में परिणामों की व्याख्या की जाती है। परिकल्पना परीक्षण द्वारा प्राप्त अनुमानों के आधार पर अर्थमिति प्रतिमान के निहितार्थों का अन्वेषण किया जाता है।

प्रायिकता वितरण

यादृच्छिक चर विभिन्न मान ग्रहण करता है। माना कि X यादृच्छिक चर एक सिक्का उछालने के लिए संभव परिणामों को निर्देशित करता है। ऐसी स्थिति में सिक्के को उछालने पर उसके चित्त

या पट की संभावना होती है, इसलिए इसकी प्रायिकता 1/2 होगी। इसी प्रकार एक पासे के छह परिणामों के आधार पर उसकी प्रायिकता 1/6 होगी। माना कि किसी यादृच्छिक चर X के मानों $X_1, X_2, X_3, ... X_n$ के लिए प्रायिकताएँ $p_1, p_2, p_3 .... p_n$ हैं, तो हम इसे $p(X = X_i) = p_i$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। जब चर कुछ पृथक मान धारण करता है, तो उसे असतत यादृच्छिक चर कहा जाता है, जबकि सभी मान धारण करने पर चर को सतत यादृच्छिक चरण कहा जाता है। प्रायिकता वितरण किसी यादृच्छिक चर की प्रायिकता के साथ प्रस्तुति है। एक असतत यादृच्छिक चर के लिए प्रायिकता वितरण फलन प्रायिकता पुँज फलन कहलाता है, जबकि एक सतत यादृच्छिक चर के लिए यह प्रायिकता घनता फलन कहलाता है।

असतत प्रायिकता वितरण

एक असतत यादृच्छिक चर के लिए प्रायिकता पुँज फलन को $p(X)$ के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। एक प्रायिकता पुँज फलन को दो शर्तें अवश्य पूरी करनी चाहिए

1. किसी भी घटना की प्रायिकता नकारात्मक नहीं होती अर्थात X_i के प्रत्येक मान के लिए हम $p(X_i) \geq 0$ प्राप्त करते हैं।

2. सभी संभव परिणामों के योग की प्रायिकता एक इकाई होती है अर्थात $\sum_{all\, x} p(X_i) = 1$। द्विपद वितरण एक महत्त्वपूर्ण प्रायिकता पुँज फलन है।

द्विपद वितरण द्विपद वितरण ऐसे संभव परिणामों को बताता है, जिसमें केवल दो ही परिणाम संभव होते हैं; जैसे किसी घटना का घटित होना या न होना। एक प्रायिकता प्रयोग को तब द्विपद वितरण माना जाता है, जब वह निम्नलिखित शर्तों को पूरा करता है

1. प्रयोग n बार दोहराया गया हो।

2. परिणाम को वर्गीकृत करना।

3. सफलता की प्रायिकता, जिसे p से प्रदर्शित किया जाता है तथा असफलता की प्रायिकता $(q = (1 - p)$ भी प्रत्येक परीक्षण में समान रहती है।

4. सभी जांचें स्वतंत्र होती हैं। सफलता की प्रायिकता को हम इस सूत्र द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं

$$p(x) = {}^nC_x p^x (1-p)^{n-x} \qquad ...(1)$$
$$x = 0, 1, 2, ..., n.$$

सतत प्रायिकता वितरण

सतत यादृच्छिक चर (X) की प्रायिकता शून्य (0) होती है। भार को हम एक यादृच्छिक चर मान सकते हैं, परन्तु इसमें बदलाव हो सकता है। उदाहरण के लिए, यदि हम किसी व्यक्ति के भार के विषय में नहीं जानते। यदि व्यक्ति का भार 50 से 51 किलो के मध्य है, तो इस अन्तराल के मध्य अनेक मान संभव हो सकते हैं, इसलिए हम व्यक्ति के भार की प्रायिकता 50 से 51 किलोग्राम के मध्य मान सकते हैं। इसी प्रकार हम सतत यादृच्छिक चरण X के लिए एक अन्तराल की प्रायिकता स्थिर करते हैं। $p(X)$ फलन प्रायिकता घनता फलन कहलाता है। इसकी सहायता से हम प्रायिकता $P(a < X < b)$ का परिकलन कर सकते हैं। $p(X)$ द्वारा परिभाषित वक्र और X-अक्ष के बीच के सारे क्षेत्रफल का मान एक समान होता है। समुच्चय R पर आधारित चर X_i के लिए प्रायिकता घनता फलन को निम्नलिखित शर्तें पूरी करनी चाहिए

1. $p(X_i) \geq 0$ for all $X_i \in R$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(X)\, dX = 1$ तथा

3. $p(a < X < b) = \int_a^b p(X)\, dX$

प्रसामान्य वितरण यह सबसे अधिक उपयोग में आने वाला वितरण है। यह वितरण भार एवं ऊँचाई से सम्बन्धित खोजों, बौद्धिक गणना, आय की त्रुटियों को बताने तथा वर्षों का अध्ययन करने में अत्यधिक उपयोगी है। एक सतत यादृच्छिक चर के प्रायिकता घनता फलन $p(x)$ को हम इस प्रकार प्रस्तुत कर सकते हैं

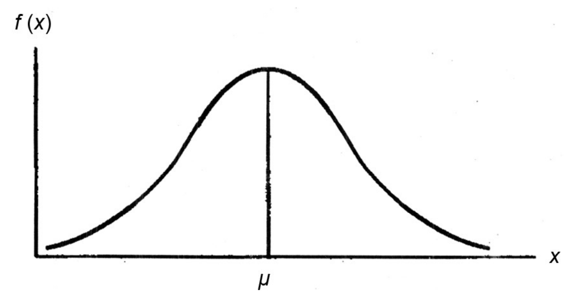
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad ...(1.2)$$

इसमें $-\infty < x < \infty$

और $\pi = 3.17141$ लगभग

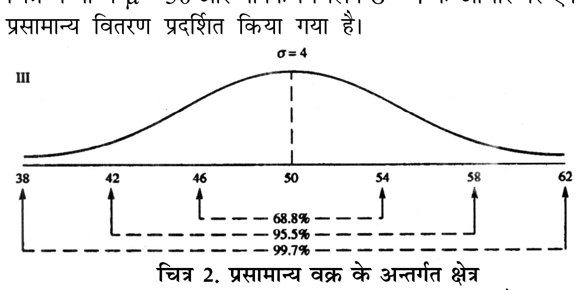
$e = 2.71828$ लगभग

μ और σ प्राचलों द्वारा ही प्रसामान्य घनता फलन निर्धारित होता है। इसका अर्थ है कि हम μ और σ के मानों के लिए सामान्य वक्र प्राप्त कर सकते हैं। यह स्पष्ट है कि μ और σ प्रसामान्य वितरण के माध्य और मानक विचलन हैं। यदि कोई यादृच्छिक चर X, माध्य (μ) तथा मानक विचलन (σ) के साथ प्रसामान्य वितरण का अनुकरण करता है, तो हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं $X \sim N(\mu, \sigma)$ प्रसामान्य वक्र घण्टी के आकार का एक समरूप वक्र होता है, जैसा कि नीचे चित्र में प्रदर्शित किया गया है



चित्र 1. प्रसामान्य वक्र

एक प्रसामान्य वक्र $-\infty$ से $+\infty$ तक विस्तृत होता है। नीचे दिए चित्र में माध्य $\mu = 50$ और मानक विचलन $\sigma = 4$ के आधार पर एक प्रसामान्य वितरण प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 2. प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्र

एक प्रसामान्य वितरण की विशेषताएं इस प्रकार हैं

1. एक प्रसामान्य वक्र में 68.8% क्षेत्र $\mu - \sigma$ और $\mu + \sigma$ के मध्य पड़ता है। उपर्युक्त चित्र 2 में X के 46 और 54 के बीच विस्तार द्वारा 68.8% क्षेत्र ढका हुआ है।

2. एक प्रसामान्य वक्र में 95.5% क्षेत्र $\mu - 2\sigma$ और $\mu + 2\sigma$ के मध्य पड़ता है। चित्र में $42 \le X \le 58$ होने की स्थिति में 95.5% क्षेत्र ढका हुआ है।

3. एक प्रसामान्य वक्र में 99.7% क्षेत्र $\mu - 3\sigma$ और $\mu + 3\sigma$ के मध्य पड़ता है। चित्र में जब $38 \le X \le 62$ है, तो 99.7% क्षेत्र ढका हुआ है।

एक प्रमुख समस्या यह है कि μ और σ कोई भी मान ले सकते हैं। सामान्य चर में से μ को घटाकर तथा उसे σ से विभाजित करने पर यह समस्या हल की जा सकती है। इस प्रकार हम मानक प्रसामान्य विचर $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ प्राप्त कर सकते हैं। जिसका माध्य O तथा मानक विचर 1 है।

मानक प्रसामान्य विचर के प्रायिकता घनता फलन 'Z' को हम इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं-

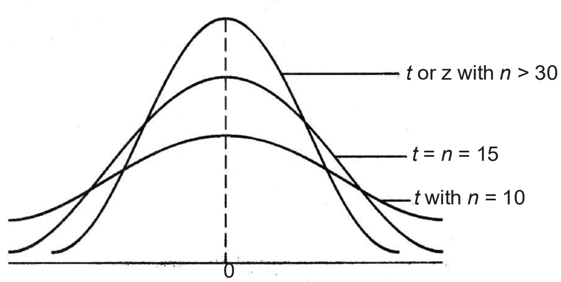
$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}Z^2} \quad -\infty < z < \infty \qquad ...(1.3)$$

मानक प्रसामान्य विचर प्राप्त कर लेने के बाद μ और σ के विभिन्न संयोगों के लिए प्रायिकता क्षेत्र प्राप्त करने का कार्य सरल हो जाता है। महत्त्वपूर्ण बात यह है कि मानक प्रसामान्य विचर का माध्य शून्य होता है।

स्टूडेंट्स *t* वितरण वितरण का प्रतिपादन डब्ल्यू.एस. गोसेट ने किया था। गोसेट आयरलैण्ड में एक शराब बनाने के कारखाने में काम करता था। गोसेट ने स्टूडेंट नाम अपनाकर अपने वितरण को स्टूडेंट्स *t* वितरण नाम दिया। यदि z_i को एक सामान्य वितरण माने, अर्थात $z_i \sim N(0, 1)$ और z_2 अन्य स्वतंत्र चर है, जो k स्वातंत्र्य कोटि के साथ काई-वर्ग वितरण (Chi-square distribution) का अनुकरण करता है तो

$$z_2 \sim \chi_k^2, \; t = \frac{z_1}{\sqrt{\left(\dfrac{z_2}{k}\right)}} = \frac{z_1\sqrt{k}}{\sqrt{z_2}}$$

इसमें k स्वातंत्र्य कोटि के साथ t वितरण का अनुकरण करता है। स्वातंत्र्य की विभिन्न कोटियों के साथ t वितरण के लिए प्रायिकता वक्रों को नीचे चित्र में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 3. *t* वितरण

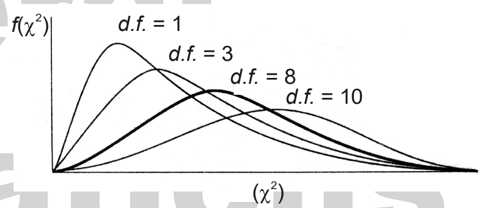
स्टूडेंट्स t वितरण की महत्त्वपूर्ण विशेषताएं इस प्रकार हैं

1. चित्र से स्पष्ट है कि t वितरण भी प्रसामान्य वितरण की तरह समरूप है। इसके प्रसरण का विस्तार $-\infty$ से $+\infty$ तक होता है। t वितरण प्रसामान्य वितरण की अपेक्षा अधिक समतल होता है।

2. t वितरण का माध्य शून्य होता है तथा इसका प्रसरण $\dfrac{k}{(k-2)}$ होता है।

3. t वितरण सांख्यिकीय निष्कर्षों में अत्यधिक उपयोगी होता है, विशेषकर प्रतिदर्श के छोटा होने की स्थिति में। प्रसामान्य वितरण की तरह t वितरण की भी मानक तालिका निर्मित कर ली गई है।

काई-वर्ग वितरण (Chai-Square Distribution) यदि z एक प्रसामान्य विचर की तरह व्यवहार करता है, तो z^2 का वितरण χ^2 चर की तरह हो जाता है। χ^2 एक वर्ग पद होता है, इसलिए जब z का विस्तार $-\infty$ से $+\infty$ तक होता है, तो काई-वर्ग का विस्तार 0 से $+\infty$ तक होता है। z का माध्य शून्य होता है, इसलिए χ^2 से लिए गए अधिकांश मूल्य शून्य (0) के आस-पास होते हैं। फलस्वरूप x^2 वितरण का प्रायिकता घनता शून्य के आस-पास होगा। यदि z_1, $z_2 \ldots z_K$, k स्वतंत्र काई वर्ग चर हैं, तो चर $z = \sum_{i=1}^{k} z_i k$ स्वातंत्र्य कोटि के साथ χ^2 वितरण का अनुकरण करता है। इसे हम χ_k^2 द्वारा प्रदर्शित करते हैं। χ^2 का प्रायिकता घनता फलन नीचे चित्र 4 में प्रदर्शित किया गया है। चित्र को देखने से स्पष्ट होता है कि जब स्वातंत्र्य संख्या बढ़ती है, तो χ^2 वितरण भी प्रसामान्य वितरण की ही तरह हो जाता है।



चित्र 4. *t* काई-वर्ग प्रायिकता वक्र

F-वितरण एक अन्य प्रायिकता वितरण, जिसका अर्थमिति में अत्यधिक महत्त्व है, वह F-वितरण है। यदि z_1 और z_2 चर k_1 तथा K_2 स्वातंत्र्य कोटियों के साथ स्वतंत्र रूप से वितरित हैं, तो चर होगा

$$F = \frac{z_1 / k_1}{z_2 / k_2}$$

इस सूत्र में k_1 और k_2 F-वितरण का अनुकरण करेगा। चर को इस प्रकार भी प्रदर्शित किया जा सकता है F_{k_1, k_2}; F-वितरण की कुछ महत्त्वपूर्ण विशेषताएं हैं, जो इस प्रकार हैं

1. F-वितरण की दाईं ओर तिरछा होता है। परन्तु k_1 तथा k_2 के बढ़ने के साथ यह प्रसामान्य वितरण के करीब चला जाता है।

2. एक F-वितरण k कोटि के t वितरण के वर्ग के समान होता है, इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$F_{1, k} = t_k^2$$

3. यदि कोटि (k_2) का आकार बड़ा हो, तो अंश की कोटि k_1 और F मान का गुणनफल k_1 कोटि χ^2 के समान होता है अर्थात

$$F = \chi_{k_1}^2$$

F = वितरण का उपयोग सांख्यिकीय निष्कर्षों में बहुतायत से किया जाता है।

प्रतिचयन वितरण

कुछ रुकावटों (लागतें, समय तथा मानव शक्ति) के कारण सम्पूर्ण समष्टि के निरीक्षण का कार्य नहीं किया जा सकता, इसलिए हम प्रतिचयन का उपयोग करते हैं। यदि प्रतिदर्श बहुत छोटा नहीं है, तो उसे समष्टि का प्रतिनिधि मान सकते हैं। यह माना जाता है कि प्रतिचयन परिणामों में समष्टि की तुलना में कम त्रुटियां पाई जाती हैं। इसलिए समष्टि की तुलना में प्रतिचयन का उपयोग करना अधिक उचित रहता है। एक समष्टि से हम कई प्रकार के प्रतिदर्श ले सकते हैं। प्रतिदर्श माध्यों का एक बारंबारता वितरण-सा बन जाता है, जिसे हम प्रतिचयन वितरण कहते हैं।

जब प्रतिदर्श माध्य $(\overline{X})$ कई प्रकार के मानों को लेता है, तो हम प्रत्येक मान के लिए एक निश्चित प्रायिकता को सम्बद्ध कर सकते हैं। ऐसी स्थिति में इस चर को हम यादृच्छिक चर मान सकते हैं। वास्तविक जीवन में हमारे पास प्रतिदर्शों की संख्या निश्चित होती है। ऐसी स्थिति में $\overline{X}$ को हम एक असतत यादृच्छिक चर मान सकते हैं, परन्तु यदि प्रतिदर्शों की संख्या अनिश्चित होती है, तो यह $(\overline{X})$ सतत यादृच्छिक चर होता है।

केन्द्रीय सीमा प्रमेय की अवधारणा के अनुसार $\overline{X}$ का प्रतिचयन वितरण प्रसामान्य होता है। यदि प्रतिदर्श (x) का आकार बड़ा, हो, तो $\overline{X}$ का प्रतिचयन वितरण लगभग प्रसामान्य होता है। यदि मूल समष्टि प्रसामान्य हो तो प्रतिदर्श का माध्य प्रतिचयन वितरण भी प्रसामान्य होता है। चाहे प्रतिदर्श का आकार छोटा ही क्यों न हो।

प्रतिदर्श माध्य का प्रकीर्णन मूल समष्टि के प्रकीर्णन की तुलना में काफी छोटा होता है। प्रतिचयन वितरण के मानक विचलन को हम मानक त्रुटि कहते हैं। यदि समष्टि का मानक विचलन σ है, तो प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ होगी।

यदि हम प्रतिदर्श का आकार बड़ा $(n > 30)$ मानें, तो छोटे प्रतिदर्शों $(n \leq 30)$ के लिए प्रतिचयन वितरण t वितरण के ही समान होता है। महत्त्वपूर्ण बात यह है कि t वितरण की स्थिति में प्रायिकता वक्र का आकार इसकी 'तय कोटि' के साथ परिवर्तित होता रहता है।

सांख्यिकीय अनुमिति या निष्कर्ष

यह समष्टि से लिए गए प्रतिदर्श में विद्यमान सूचना के आधार पर समष्टि की विशेषताओं के सम्बन्ध में निष्कर्ष निकालने की विधियाँ हैं। समष्टि के बजाय हम प्रतिदर्श माध्य के बारे में अधिक जानकारी रखते हैं। सांख्यिकीय अनुमिति में हम दो प्रकार के प्रश्नों का उत्तर देने का प्रयास करते हैं, पहला यह कि समष्टि माध्य का मान क्या होगा? इसे हम आकलन करना कहते हैं। दूसरा प्रश्न समष्टि माध्य के सम्बन्ध में कुछ निश्चित घोषणा करता है। इसे परिकल्पना परीक्षण कहते हैं।

आकलन (Estimation)

आकलन दो प्रकार का होता है बिन्दु आकलन तथा अन्तराल आकलन। बिन्दु आकलन में हम समष्टि प्राचल के मान को एकल बिन्दु की तरह आकलित करने का प्रयास करते हैं, जबकि अन्तराल आकलन की स्थिति में हम प्रतिदर्श माध्य के चारों ओर विद्यमान निम्न सीमा तथा उच्च सीमा का आकलन करते हैं।

1. बिन्दु आकलन (Point Estimation) सर्वोत्तम अनुमान प्रतिदर्श परिगणन का मान होता है। ऐसी स्थिति में हम प्राचल के आकलन के लिए एक बिन्दु का उपयोग करते हैं। आकलन एवं आकलक के बीच भिन्नता को देखते हैं। आकलक सूत्र है तथा आकलन सूत्र के द्वारा प्राप्त मान है। उदाहरण के लिए, प्रतिदर्श माध्य के लिए 120 मान प्राप्त किया जाता है। ऐसी स्थिति में 120 समष्टि माध्य का आकलन है। समष्टि से अन्य प्रतिदर्श भी निकाले जा सकते हैं। सूत्र का उपयोग करके प्रतिदर्श माध्य के लिए $\frac{1}{n}\sum_i x_i$ अर्थात 123 मान प्राप्त करते हैं। 120 तथा 123 दोनों समष्टि माध्य के आकलन हैं कुछ ऐसी भी स्थितियाँ होती हैं, जब प्राचल के लिए एक से अधिक आकलकों की संभावना होती है। इनमें से सबसे श्रेष्ठ आकलक चुनने के लिए कुछ मापदण्डों के अनुकरण की आवश्यकता होती है, जो इस प्रकार हैं

***(i)* अनभिनत (Unbiasedness)**–यदि $E(\hat{\theta}) = \theta$ तथा $\hat{\theta}_n$ को अवलोकनों पर आधारित एक परिगणन माना जाये, तो इसे अनभिनत होना कहा जाता है। अनभिनत यह बताता है कि एक आकलन प्राचल के अज्ञात मान की अपेक्षा उच्चतम या निम्नतम भी हो सकता है। किसी आकलक में अभिनति का विस्तार $E(\hat{\theta}) - \theta$ द्वारा दिया जाता है। प्रतिदर्श माध्य एक अनभिनत आकलन है।

***(ii)* संगति (Consistency)** एक आकलक की विशेषताएँ हैं संगति और अनंतस्पर्शी। यदि प्रायिकता सीमा $plim\ (\hat{\theta}) = \theta$ है, तो एक आकलक $\hat{\theta}$ संगत कहला सकता है। यहाँ plim शब्द प्रायिकता को बताता है। महत्त्वपूर्ण बात यह है कि अनभिनति की स्थिति में परिगणक प्राचल के बराबर होता है। जब प्रतिदर्श का आकार बढ़ता है, तो परिगणक प्राचल के मान के बराबर होता है। कुछ ऐसे आकलक भी होते हैं, जो संगत नहीं होते। हम मान लेते हैं कि कोई परिगणक प्रायिकताओं के साथ दो असतत मान धारण करता है

$$\hat{\theta} = \theta \text{ प्रायिकता } \frac{n-1}{n}; \ \hat{\theta} = n \text{ प्रायिकता } \frac{1}{n}$$

ऐसी स्थिति में $plim\ (\hat{\theta}) = \theta$ है। क्योंकि जब $n \to \infty$ है, तो प्रायिकता भी $\frac{1}{n} \to 0$ है। यदि प्रतिदर्श का आकार 10 है, तो

$$E(\hat{\theta}) = \theta\left(\frac{9}{10}\right) + \frac{1}{10}(10) = 0.9\theta + 1 \neq \theta \text{ है।}$$

***(iii)* दक्षता (Efficiency)**–दक्षता किसी आकलक के प्रसरण की जानकारी देती है। जिस आकलक का प्रसरण न्यूनतम हो, वह अधिक दक्ष कहलाता है, जो आकलक एक समान होते हैं, उनके मध्य तुलना भी की जाती है। हम विभिन्न रेखीय आकलकों के बीच तुलना कर सकते हैं।

***(iv)* अनन्तस्पर्शी अभिनति (Asymptotic Bias)**–यदि परिगणक का मान प्राचल के मान के बराबर हो, तो उसे अनन्तस्पर्शी अभिनत कहा जाता है। एक परिगणन का अनन्तस्पर्शी मान इस प्रकार है

$$AE(\hat{\theta}) = \lim E(\hat{\theta}) \text{ as } n \to \infty$$

कोई अभिनत आकलक अनन्तस्पर्शी हो, यह आवश्यक नहीं है। माना कि