NEERAJ®

अर्थशास्त्र में प्रारंभिक गणितीय विधियाँ

(Elementary Mathematical Methods In Economics)

By:
Payal Jain

Reference Book
Including
Solved Question Papers

New Edition

NEERAJ PUBLICATIONS
(Publishers of Educational Books)
(An ISO 9001 : 2008 Certified Company)
1507, Ist Floor, NAI SARAK, DELHI - 110 006
Ph.: 011-23260329, 45704411, 23244362, 23285501 Off. Mob. : 8510009878
***E-mail:* info@neerajignoubooks.com**
***Website:* www.neerajignoubooks.com**

Price
₹ 200/-

Published by:

NEERAJ PUBLICATIONS

Admn. Office : **Delhi-110 007**
Sales Office : **1507, 1st Floor, Nai Sarak, Delhi-110 006**
E-mail: **info@neerajignoubooks.com** *Website*: **www.neerajignoubooks.com**

Typesetting by: ***Competent Computers*** *Printed at*: ***Novelty Printer***

Notes:

1. *For the best & upto-date study & results, please prefer the recommended textbooks/study material only.*
2. *This book is just a Guide Book/Reference Book published by NEERAJ PUBLICATIONS based on the suggested syllabus by a particular Board /University.*
3. *The information and data etc. given in this Book are from the best of the data arranged by the Author, but for the complete and upto-date information and data etc. see the Govt. of India Publications/textbooks recommended by the Board/University.*
4. *Publisher is not responsible for any omission or error though every care has been taken while preparing, printing, composing and proof reading of the Book. As all the Composing, Printing, Publishing and Proof Reading etc. are done by Human only and chances of Human Error could not be denied. If any reader is not satisfied, then he is requested not to buy this book.*
5. *In case of any dispute whatsoever the maximum anybody can claim against NEERAJ PUBLICATIONS is just for the price of the Book.*
6. *If anyone finds any mistake or error in this Book, he is requested to inform the Publisher, so that the same could be rectified and he would be provided the rectified Book free of cost.*
7. *The number of questions in NEERAJ study materials are indicative of general scope and design of the question paper.*
8. *Question Paper and their answers given in this Book provide you just the approximate pattern of the actual paper and is prepared based on the memory only. However, the actual Question Paper might somewhat vary in its contents, distribution of marks and their level of difficulty.*
9. *Subject to Delhi Jurisdiction only.*

NEERAJ PUBLICATIONS

(Publishers of Educational Books)

(An ISO 9001 : 2008 Certified Company)

1507, 1st Floor, NAI SARAK, DELHI - 110 006

Ph. 011-23260329, 45704411, 23244362, 23285501, Off. Mob. : 8510009878

E-mail: **info@neerajignoubooks.com** *Website:* **www.neerajignoubooks.com**

CONTENTS

अर्थशास्त्र में प्रारंभिक गणितीय विधियाँ
(Elementary Mathematical Methods In Economics)

✦ ✦ ✦

Sample Preview of the Solved Sample Question Papers

Published by:

NEERAJ PUBLICATIONS
www.neerajbooks.com

QUESTION PAPER

(June – 2016)

(Solved)

अर्थशास्त्र की प्रारंभिक गणितीय विधियाँ

समय : 3 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 100*

नोट : (i) प्रत्येक खण्ड से दिये गये निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

खण्ड क

इस खण्ड से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दें

प्रश्न 1. आपको उत्पादन फलन दिया गया है, $y = K^{\alpha} L^{\beta}$, तथा लागत फलन है $c = rK + \omega L$, तो न्यूनतम लागत को उत्पादन स्तर तथा कारक कीमतों के फलन के रूप में ज्ञात करें। इस फलन के स्वरूप पर भी टिप्पणी करें।

उत्तर संदर्भ देखें अध्याय-12, पृष्ठ-103, 'लागत और आपूर्ति'

प्रश्न 2. निम्नलिखित द्वि-सामग्री बाजार मॉडल को हल करें तथा p_1, p_2 और q_1, q_2 के समीकरण ज्ञात करें:

$$q1^s = \alpha_1 + \beta_{11} + p_1 + \beta_{12}\, p_2$$

$$q2^s = \alpha_2 + \beta_{21}\, p_1 + \beta_{22}\, p_2$$

$$q1^d = a_1 + b_{11}\, p_1 + b_{12}\, p_2$$

$$q2^d = a_2 + b_{21}\, p_1 + b_{22}\, p_2$$

उत्तर संदर्भ देखें अध्याय-3, पृष्ठ-24, 'रैखिक बहुबाजार मॉडल'

प्रश्न 3. निम्नलिखित गेम में मिश्र-रणनीति नैश-संतुलन ज्ञात करें।

खिलाड़ी-2

		बायें	दायें
खिलाड़ी-1	ऊपर	0, 0	0, 1
	नीचे	1, 0	1, 1

इस समाधान में क्या परिवर्तन होगा यदि खिलाड़ी मैक्स-मिन रणनीति अपनाते हैं?

उत्तर इस गेम में कोई शुद्ध रणनीति नहीं है, वरन खिलाड़ी अलग-अलग रणनीति में अलग-अलग फ्रीक्वेन्सी से खेल रहे हैं, यदि खिलाड़ी 1 व 2 की मानें, तो बाया खिलाड़ी 50% समय पर बायीं ओर खेलता है, तथा बायाँ खिलाड़ी 50% ऊपर की तरफ खेलता है। इस तरह इस गेम में खिलाड़ी-2 की प्रायिकता P and (1– P) होगी, खिलाड़ी के लिये मिश्र रणनीति एक प्रायिकता बंटन है। जो शुद्ध रणनीति में प्रायिकता सदिश होगी।

$oqp + 0\,(1 - q)\,p + 1q\,(1 - p) + (-1)\,(1 - p)\,(1 - q)$
$= p - 1 + 2\,q\,(1 - p)$
$opq + (-1)\,p\ (1 - q) + 0\,(1 - p)\,q + 1\,(1 - p)$
$(1 - q) = 1 - q - zp\,(1 - q)$

अत: खिलाड़ी-2 की शुद्ध रणनीति $p = 1$ होगी,
यदि $0 \leq p \leq 1$.
खिलाड़ी-1 की शुद्ध रणनीति $q = 1$ होगी
यदि $0 \leq q \leq 1$.

जब हम मिश्र रणनीति वाले गेम में मैक्स-मिन संतुलन रणनीति का प्रयोग करते हैं।

खिलाड़ी-2

		बायें	दायें	अधिकतम
खिलाड़ी-1	ऊपर	0, 0	0, 1	0, 1
	नीचे	1, 0	1, 1	1, 1
	अधिकतम	1, 0	1, 1	

ऊपर दिये गये मानों से खिलाड़ी-1 की अधिकतम प्रायिकता (1, 0) और (1, 1) तथा खिलाड़ी-2 की (0, –1) और (–1, 1) होगी। गेम का संतुलन (–1, 1) होगा।

प्रश्न 4. कृषि, खनिज तथा उद्योग वाले किसी त्रि-क्षेत्रीय अर्थव्यवस्था को लें इसका

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.3} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{0.2} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{0.4} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.3} \end{bmatrix} \text{ तथा}$$

चरम (अंतिम) माँग है। $= \begin{bmatrix} \mathbf{20000} \\ \mathbf{10000} \\ \mathbf{40000} \end{bmatrix}$

हल दिया गया है।

$$A = \begin{bmatrix} .3 & .5 & .3 \\ .2 & .2 & .3 \\ .4 & .2 & .3 \end{bmatrix} \text{ और}$$

$$\text{अंतिम माँग} = \begin{bmatrix} 20000 \\ 10000 \\ 40000 \end{bmatrix}$$

***(a)* कुल उत्पादन सदिश का परिकलन करें।**

हल–उत्पादन सदिश $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [1 - \text{A}]^{-1} d.$

$$(1 - \text{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .3 & .5 & .3 \\ .2 & .2 & .3 \\ .4 & .2 & .3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} .7 & -.5 & -.3 \\ -.2 & .8 & -.3 \\ -.4 & -.2 & .7 \end{bmatrix}$$

$$(1 - \text{A})^{-1} = \frac{1}{[\text{A}]} [\text{Adj A}]$$

$$\begin{aligned} |\text{A}| &= [.7\,(.8 \times .7 - .06) - (-.2)\,(-.35 - .06)] \\ &\quad + -.4\,(.15 + .24) \\ |\text{A}| &= .7 \times .50 - .2 \times .41 - .4 \times .39 \\ |\text{A}| &= .35 - .82 - .156 \\ |\text{A}| &= .112 \end{aligned}$$

$$\text{Adj A} = \begin{bmatrix} .50 & .41 & .09 \\ 0.26 & .37 & .27 \\ .36 & -.06 & .46 \end{bmatrix}$$

$$(1 - \text{A})^{-1} = \frac{1}{.112} \begin{bmatrix} .50 & .41 & .09 \\ 0.26 & .37 & .27 \\ .36 & -.06 & .46 \end{bmatrix}$$

$$\text{उत्पादन सदिश} = \frac{1}{.112} \begin{bmatrix} .50 & .41 & .09 \\ .26 & .37 & .27 \\ .36 & -.06 & .46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 \\ 10000 \\ 40000 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{.112} \begin{bmatrix} 10000 + 41000 + 3600 \\ 5200 + 3700 + 10800 \\ 6000 - 6000 + 18400 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{.112} \begin{bmatrix} 11700 \\ 19700 \\ 23800 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 104464 \\ 175893 \\ 212500 \end{bmatrix}$$

***(b)* क्या दिये हुये आँकड़े हॉकिन्स साइमन शर्त निभाते है?**

उत्तर हॉकिन्स साइमन के अनुसार यदि उत्पादन सकारात्मक होगा, तो उसका सदिश (1– A) भी सकारात्मक होना चाहिये, अतः दिये गये शर्त के अनुसार सकारात्मक उत्पादन जो कि अनिवार्य है oks $(1 - a_{11} > 0)$ तथा सकारात्मक होगा और दूसरी शर्त $[1 - \text{A}] > 0$ यहां पर $[1 - \text{A}] = .112 > 0$ है, अतः दिया गया आंकड़ा हाकिन्स साइमन की शर्त को पूर्ण रूप से निभाता है।

खण्ड ख

इस खण्ड से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दें

प्रश्न 5. गतिकीय इष्टतमीकरण समस्या के समाधान के लिये गतिकीय प्रोग्रामन की विधि की व्याख्या कीजिए।

उत्तर संदर्भ देखें अध्याय-19, पृष्ठ-158, 'गतिकीय प्रोग्रामन' तथा 'समस्या का प्रतिपादन'

प्रश्न 6. शेपर्ड लेमा (Lemma) प्राप्त करें।

उत्तर संदर्भ देखें अध्याय-13, पृष्ठ-113, 'शेपर्ड लेमा'

प्रश्न 7. रैखिक समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली को लें

$$\begin{aligned} x + y + z &= b \\ 2x + 3y - z &= 6 \\ 5x - y + az &= 10 \end{aligned}$$

जहाँ x, y, z अज्ञात हैं तथा a, b अचर हैं।

ज्ञात करें उन शर्तों को जिसके चलते क्रेमर नियम से एकल समाधान प्राप्त हो।

हल $\text{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= 1(3a - 1) - 1\,(2a + 5) + 1\,(-2 - 15) \\ &= 3a - 1 - 2a - 5 - 2 - 15 \\ &= a - 23 \end{aligned}$$

यदि $\text{D} \neq 0$

$a - 23 \neq 0$

$a \neq 23$

दिये गयी प्रणाली का एकल समाधान

$$x = \frac{\text{D}_1}{\text{D}},\; y = \frac{\text{D}_2}{\text{D}},\; 2 = \frac{\text{D}_3}{\text{D}}$$

$$\begin{aligned} \text{D}_1 &= 3ab - b - ba + 26 \\ \text{D}_2 &= 6a - 2ab - 5b \\ \text{D}_3 &= 46 - 17\,b \end{aligned}$$

$$x = \frac{3ab - b - 6a + 26}{a - 23}$$

$$y = \frac{6a - 2ab - 5b}{a - 23}$$

$$z = \frac{46 - 176}{a - 23}$$

Sample Preview
of
The Chapter

Published by:

NEERAJ
PUBLICATIONS
www.neerajbooks.com

अर्थशास्त्र में प्राथमिक गणितीय विधियाँ

(ELEMENTARY MATHEMATICAL METHODS IN ECONOMICS)

आरंभिक बीजगणित
(Elementary Algebra)

समुच्चय, संबंध तथा फलन
(Sets, Relations and Functions)

1

परिचय

अर्थशास्त्र के अंतर्गत विभिन्न सिद्धांतों व नियमों के अतिरिक्त सांख्यिकीय का भी प्रयोग किया जाता है। समय के साथ-साथ आज अर्थशास्त्र में गणित का भी महत्त्वपूर्ण स्थान हो गया है। गणितीय अवधारणाएँ मूलत: अर्थशास्त्र को समझने व उनका विश्लेषण करने के संदर्भ में महत्वपूर्ण मानी जाती हैं। गणित के मूल रूप को समझने के लिए सर्वप्रथम समुच्चय, संबंध तथा फलन के प्रारंभिक विचारों को जानना अति आवश्यक है। किसी भी प्रकार के निर्णय लेने से संबंधित समस्याओं में गणितीय समीकरणों का उपयोग अत्यन्त अनिवार्य है। इसके मुख्य कारण निम्नलिखित हैं

(a) समस्या के संदर्भ में जो भी प्राथमिक आवश्यकताएं हैं, उनके प्राथमिक घटकों की पहचान करके उनके महत्त्वपूर्ण संबंधों की पहचान करना।

(b) वस्तुओं की कीमतों का उसकी स्थानापन्न कीमतों से संबंध ज्ञान करना।

उपर्युक्त कारणों से अर्थशास्त्र में गणित की व्याख्या की जाती है।

अध्याय का विहंगावलोकन

समुच्चय क्या है?

वस्तुओं (Objects) के एक सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहा जाता है। समुच्चय निम्नलिखित प्रकार के हो सकते हैं

- समसंख्याएँ [Even Numbers] 2, 4, 6, 8, 10.....
- हमारी पसंद के व्यंजन दाल, चावल, दही, रोटी, सब्जी..
- आभूषण जैसे सोने का सैट, चेन, चूड़ियाँ......

समुच्चय के अंतर्गत अनेक प्रविष्टियों को रखा जाता है। इसके लिए दो तरीकों की प्रविष्टियां (Entries) की जाती हैं

(a) पहली जिसमें हम अंग्रेजी के 26 अक्षर अर्थात *a, b, c, d, e, f,*..... आदि लेते हैं।

(b) दूसरी जिसमें स्वर अर्थात vowels को *(a, e, i, o, u)* ही लिया जाता है।

समुच्चय लिखते समय कुछ बातों का ध्यान भी रखा जाता है, जो निम्नलिखित हैं

(i) समुच्चय लिखने में घुंघराले (curly) कोष्ठकों (Brackets) का प्रयोग किया जाता है ( ), { }

(ii) समुच्चय में इन्वर्टेड कोमा (Inverted Commas) का भी प्रयोग होता है अर्थात् " "।

(iii) जब समुच्चयों को लिखा जाता है तो अंत में आने वाले बिन्दु (so on) दर्शाते हैं कि समुच्चय अनन्त हैं a, b, *c, d, e*..... या 2, 4, 6, 8, 10, 12.....।

मूल रूप से देखा जाए तो समुच्चय के दो अलग-अलग रूप हैं

(1) रोस्टर, सारणीबद्ध अथवा नामावली विधि [Roster Method]

(2) विवरणात्मक विधि [Descriptive Method] अथवा समुच्चय निर्माण विधि [Defining Method].

(1) रोस्टर, सारणीबद्ध या नामावली विधि इस विधि में कोष्ठकों { } में समुच्चय या अंशों की सूची को रखा जाता है। जैसे कि माना *a, b, c, d, e* व *f* समुच्चय P है, जो कम्पनी के द्वारा भिन्न-भिन्न उत्पादों को दर्शाता है। यहाँ नामावली की विधि के द्वारा निम्नलिखित रूप से बताया जाएगा

$$P = \{a, b, c, d, e, f\}$$

(2) विवरणात्मक विधि इस विधि में नियम या शर्तों को कोष्ठकों में रखा जाता है। जैसे P = {X/X कम्पनी द्वारा निर्मित उत्पाद} इसे इस तरह बताया जाएगा कि 'P उन अवयवों (Elements) X का समुच्चय है, जो X कम्पनी द्वारा तैयार किया गया उत्पाद है। यहाँ पर / ऊर्ध्वाधर छड़ [Vertical Bar] का तात्पर्य है "ऐसे कि" अथवा 'जिसके लिए'। अर्थात् चिह्न X समुच्चय P का घटक/अवयव दर्शाता है।

समुच्चय के अवयव प्रत्येक प्रविष्टि जो समुच्चय में दी जाती है, वह उसका अवयव कहलाती है। उदाहरणस्वरूप a अक्षरों के समुच्चय का अवयव है, अथवा 3 समसंख्याओं के समुच्चय का अवयव नहीं है। समुच्चय के अवयवों को किसी भी प्रकार से लिखा जा सकता है

A, B, C, D, E.....

a, b, c, d, e......

यदि X समुच्चय है व x, X का अवयव है, तो इसे $x \in X$ की तरह से लिखेंगे।

यदि y X का अवयव नहीं है, तो $y \notin X$ की तरह लिखेंगे।

रिक्त या शून्य समुच्चय वह होते हैं जिनका कोई अवयव नहीं पाया जाता, अत: इन्हें ग्रीक अक्षर 'Phi' ϕ से दर्शाया जाता है।

जब हम यह दर्शाना चाहते हैं कि समुच्चय के अवयव भी समुच्चय हैं, तो हम इन समुच्चयों को तिरछे बड़े अक्षर (Italic Letters) से दर्शाते हैं

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\};$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

अत:

(i) $A = \{A, B, C, ...\}$ यहाँ A, B, C का समुच्चय है।

(ii) $A = \{A_\alpha : \alpha \in B\}$ यहाँ पर तथाकथित समुच्चय है व A_α समुच्चय है।

समुच्चयों के कुछ उदाहरण

(1) N = {0, 1, 2, 3, 4} यहां सभी प्राकृतिक संख्याओं [Natural Numbers] का समुच्चय $N^+ = \{n \in N : n > 0\}$ है। [ध्यान रहे सभी प्राकृतिक संख्याओं को N से दर्शाते हैं]

(2) सभी अंकों के सेट को I या Z से संकेतित किया जाता है।

(3) I या $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4 ....\}$

(4) प्रत्येक परिमेय संख्या को धनात्मक व ऋणात्मक संख्याओं व भिन्नों के सेट को Q द्वारा दर्शाया जाता है।

(5) प्रत्येक वास्तविक या परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या को R द्वारा दर्शाते हैं।

(6) सभी मिश्र संख्याओं सभी वास्तविक संस्थाओं के अलावा अवास्तविक संख्याओं के सेट को C द्वारा संकेतित किया जाता है।

समुच्चयों की कुछ मूलभूत विशेषताएँ

समुच्चयों की मूलभूत विशेषताएँ निम्नलिखित हैं

(1) समरूप समुच्चय (Equal Sets) X व Y दोनों के अवयव

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ व

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

अर्थात दोनों के अवयव समरूप हैं।

(2) उप समुच्चय (Subset) माना

$A = \{1, 2, 3\};$

$B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$

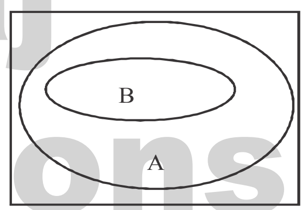
जब एक समुच्चय A का हर सदस्य समुच्चय B के अतिरिक्त का भी सदस्य हो, तो उस स्थिति में A समुच्चय B का उपसमुच्चय कहलाता है। इस संबंध को $A \subseteq B$ द्वारा दर्शाया जाता है। यहाँ A समुच्चय वास्तविक रूप में B में शामिल रहता है। इसी वजह से A को B का उप-समुच्चय कहा जाता है। समुच्चय (a, b, c) के समुच्चय $(a), (b), (a, b), (b, c), (c, a)$ ये सभी उप-समुच्चय होते हैं।

उप-समुच्चय के गुण उप-समुच्चयों में निम्नलिखित गुण पाए जाते हैं

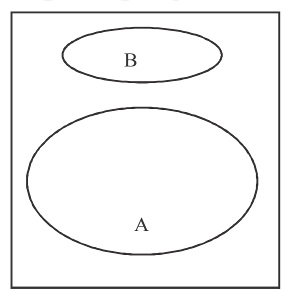
(1) शून्य समुच्चय हर एक समुच्चय का उप-समुच्चय होता है।

(2) प्रत्येक समुच्चय का अपना उप-समुच्चय होता है। यदि $A \subseteq B$ व $B \subseteq C$ है, तो $A \subseteq C$ होगा।

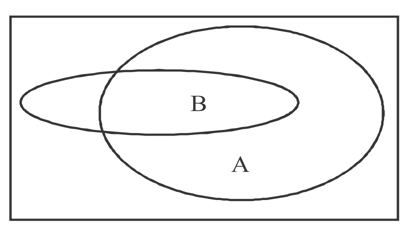
उप-समुच्चयों की धारणा का ग्राफीय रूप निम्नलिखित है। इन रेखाचित्रों को वैन रेखाचित्र (Venn Digrams) कहा जाता है।



उपर्युक्त आकृति में B पूरी तरह से A के अंदर है अत: $B \subset A$



इस आकृति में A और B में $(A \cap B = \phi)$ कुछ भी नहीं है अत: $A \not\subset B$ और $B \not\subset A$



इस रेखाचित्र में B का कुछ भाग A में है, परंतु B का सारा भाग A में नहीं है अतः $B \not\subset A$

(3) उपयुक्त उपसमुच्चय (Proper Subset) माना कि

$A = \{1, 2, 3\};$

$B = \{1, 2, 3, 5\}$

अतः A, B का उपयुक्त उपसमुच्चय है तथा इसे इस प्रकार से लिख सकते हैं $A \subset B$, परंतु ध्यान से देखने पर पता चलता है कि $A \neq B$, क्योंकि यहाँ एक अवयव $b \in B$ मौजूद है। अतः $b \notin A$ है, क्योंकि समुच्चय B में 5 एक ऐसा अवयव है, जो A में मौजूद नहीं है। अतः यहाँ A, B का उपयुक्त उपसमुच्चय है।

(4) रिक्त समुच्चय (The Empty Set) जिस समुच्चय में कोई अवयव नहीं होता, उसे रिक्त समुच्चय कहते हैं। इसे ϕ के द्वारा दर्शाया जाता है।

$$\phi = \{x \in A : x \notin A\}$$

यहाँ पर A समुच्चय है, व हम लिखते हैं

$$\phi = \{\ \}$$

यहाँ पर {0} के अवयव को शून्य माना जाता है।

(5) समुच्चय का घात समुच्चय (Power Set of a Set) माना कि समुच्चय X है तथा $X = \{1, 2, 3\}$ व $X_1 = \{1, 2\}; X_2 = \{1, 3\}; X_3 = \{2, 3\}$ है, तो X का घात समुच्चय प्राप्त करने के लिए $X = \{(1, 2); (1, 3); (2, 3)\}$ की व्याख्या की जाएगी। माना X एक समुच्चय है तथा X के समस्त उप-समुच्चयों का समुच्चय X का घात समुच्चय कहलाता है, इसे P(X) द्वारा दर्शाया जाता है। अर्थात P(X) को जब दर्शाया जाता है, तो

$$P(X) = (A : A \subset X)$$

यहाँ पर कुछ तर्क वाक्यों के आधार पर कि

(1) $A = B$ केवल तभी होगा, जब $A \subset B$ व $B \subset A$ है।

(2) $A \subset A$ व $\phi \subset A$

(3) $A \in P(A)$ व $\phi \in P(A)$,

(4) $P(\phi) = (\phi)$. $P(\phi)$ रिक्त नहीं है, इसमें ϕ एक अवयव है।

यहाँ इसे हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे

उदाहरण

माना $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

(i) $A_0 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

(ii) $A_{21} = \{1, 3\}, A_{22} = \{1, 5\}, A_{23} = \{1, 7\},$
$A_{24} = \{1, 9\}, A_{25} = \{1, 11\}, A_{26} = \{3, 5\},$
$A_{27} = \{3, 7\}, A_{28} = \{3, 9\}, A_{29} = \{3, 11\},$
$A_{30} = \{7, 9\}, A_{31} = \{7, 11\}$

यदि उपर्युक्त उप-समुच्चयों की गिनती करें, तो कुल संख्या 32 आती है। यहाँ पर समुच्चय N के अवयव हैं, अतः 2^N उप-समुच्चयों का योग किया जा सकता है।

समुच्चयों पर संक्रियाएँ

यहाँ माना कि K समुच्चयों का समुच्चय है, व सभी समुच्चय A, B, C, D..... जो कि इनमें पाए जाते हैं, उनमें हम K को मूलभूत या सार्वजनिक समुच्चय (Basis Set or Universal Set) मानते हैं।

समुच्चयों का संघ (Union of Sets)

समुच्चयों के संघ को U से निरूपित किया जाता है। यह K का संघ कहलाता है।

(1) माना समुच्चय A व B का संघ AOB है, तो यहाँ $x \in A$ या $x \in B$ के द्वारा परिभाषित किया जाएगा। अर्थात दो समुच्चयों A व B का सम्मिलन वह समुच्चय कहलाते हैं, जिनमें A अथवा B के अवयव पाए जाते हैं।

समुच्चयों के समुच्चय A के सम्मिलन को अनेक प्रकार से दर्शाया जाता है। जैसे

$$UA = \{x \in K : \exists A \in A\ x \in A\}$$

x, A अर्थात् एक अवयव है।

$\exists$ का तात्पर्य है कि 'वहाँ विद्यमान है।'

उदाहरण

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

$AOB = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13\}$

यहाँ पर 5 एक ऐसा अवयव है, जो A व B दोनों में संयुक्त समुच्चय के रूप में आएगा। अतः इसे दो बार निरूपित नहीं किया जाएगा।

समूहों का प्रतिच्छेदन (Intersection of Sets) समूहों के प्रतिच्छेदन को उल्टे $\cap$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

(1) समुच्चय A व B के प्रतिच्छेदन को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है

$$A \cap B = \{x \in H : x \in A \text{ व } x \in B\}$$

यहाँ दो समुच्चयों का सम्मिलन समुच्चयों के सर्वनिष्ठ अवयवों के विषय में बताता है।

(2) समुच्चय $A \neq \phi$ का प्रतिच्छेदन

$\cap A = \{x \in K : \forall A \in A\ x \in A\}$

के द्वारा परिभाषित होता है।

(3) यहाँ पर $\forall$ चिह्न का तात्पर्य है; 'सबके लिए'

उदाहरण

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

इसमें सर्वनिष्ठ अवयव 3, 5, 7, 9, 11 व 13 हैं।

अतः $AOB = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

अब यदि एक ऐसा उदाहरण लें, जिसमें कोई संख्या सर्वनिष्ठ नहीं है; जैसे

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

तो यहाँ पर चिह्न ϕ का प्रयोग किया जाता है। यह रिक्त समुच्चय कहलाता है।

$\phi = \{\ \}$

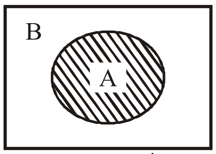
$AOB = \phi$

असंयुक्त समुच्चय (Disjoint Sets) A तथा B दोनों असंयुक्त समुच्चयों की श्रेणी में आते हैं। अगर $A \cap B = \phi$ होगा, तो कोई भी अवयव सर्वनिष्ठ नहीं कहलाता।

समुच्चय का पूरक (Complement of a Set) माना कि A व B दो समुच्चय हैं। B में A का पूरक (Complement) समुच्चय $\{x \in B : x \in A\}$ होता है; जिसे $B \sim A$ से प्रकट किया जाता है।

इसी तरह $A \sim B = \{x \in A : x \notin B\}$

यदि B समष्टीय समुच्चय U हो, तो $B \sim A$, $U \sim A$ होता है। इस समुच्चय को समुच्चय A का पूरक कहते हैं व इसे A से प्रकट किया जाता है।



अर्थात चित्र में जो भाग छायादार नहीं है; समुच्चय $B \sim A$ (या A', क्योंकि यहाँ $B = U$) को प्रकट करता है। अत: चित्र से पता चलता है कि यदि $x \in A$ है, तो $x \notin A$

समुच्चयों का अंतर (Difference of Sets) समुच्चयों के अंतर को /or – द्वारा दर्शाया जाता है।

समुच्चयों के अंतरों को दो प्रकार से दर्शाया जा सकता है

$A/B : = \{x \in K : x \in A$ and $x \notin B$: यहाँ / का तात्पर्य 'भिन्न रूप में परिभाषित' करने से है।

K/B को B का पूरक माना जाता है व B^C द्वारा दर्शाया जाता है अर्थात

$$B^C = \{x \in K : x \notin B\}$$

क्रम विनिमेयता, सहचारिता, बन्टनात्मकता (Commutativity, Associativity and Distributivity)

(1) सम्मिलन व प्रतिच्छेदन क्रम विनिमेयता व सहचारिता संक्रियाएँ हैं

(i) $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

सम्मिलन, प्रतिच्छेदन के सापेक्ष बन्टनात्मकता है व प्रतिच्छेदन, सम्मिलन के सापेक्ष बन्टनात्मक होता है

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$

डे मॉर्गेन के नियम (De Morgan's Laws)

(i) $C/(A \cup B) = (C/A) \cap (C/B)$ $C/(A \cap B) = (C/A) \cup (C/B)$

(ii) $C/(\cup A) = \cap(C/A : A \in A)$, $C/(\cap A) = \cup(C/A : A \in A)$

क्रमित युग्म व समुच्चयों का कार्तीय गुणन

क्रमित युग्म (Ordered pairs)

हम दो दिए गए समुच्चयों में से एक रोचक समुच्चय प्राप्त कर सकते हैं उनका कार्तीय गुणनफल फ्रांसीसी दार्शनिक तथा गणितज्ञ रेने देकार्त के नाम पर रखा गया था। इन्होंने ही कार्तीय निर्देश तन्त्र का भी आविष्कार किया था।

समुच्चयों A व B का कार्तीय गुणनफल $A \times B$ सभी संभव क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय होता है। जहाँ पर

$a \in A$, $b \in B$.

अर्थात $A \times B = \{(a, b)/a \in A$ और $b \in B\}$

जैसे, यदि $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 6)$, तो

$A \times B = \{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6)\}$

व $B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$

अत: हम देखते हैं कि $(1, 4) \in A \times B$, परंतु

$(1, 4) \notin B \times A$ अत: $A \times B \neq B \times A$

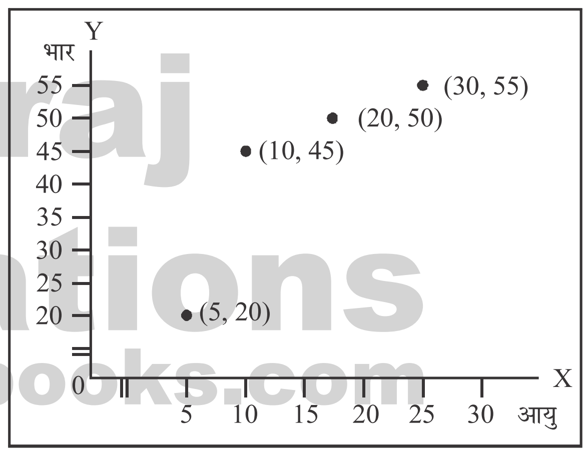
इसे हम एक और उदाहरण द्वारा देखेंगे

माना कि एक कक्षा में कुछ छात्र है व $X = \{X_1, X_2, X_3 .... X_N\}$ कक्षा के छात्रों की आयु है तथा $Y = (Y_1, Y_2, Y_3 .... Y_N\}$ कक्षा के छात्रों का भार है। अत: यहाँ पर (X_1, Y_2) कक्षा में छात्रों के गुणा, आयु व भार का युग्म प्रदान करता है। इस सूत्रण को समझाने के लिए X_1 व Y_1 को संरचनात्मक मान में विभक्त किया जाएगा। यहाँ पर X बिन्दु पर आयु तथा Y बिन्दु पर भार दर्शाया जाएगा।

माना कि $X_1 = 10$ वर्ष

$Y_1 = 45$ किलोग्राम भार है।

अत: आयु व भार के क्रमित युग्म इस प्रकार हैं



दिए गए चित्र में यह बात ध्यान रखने योग्य है कि यदि यहाँ क्रम बदल दिया गया अर्थात (45, 10) लिख देंगे, तो छात्रों की आयु 45 व भार 10 किग्रा. हो जाएगा, अत: यहाँ (10, 45) ही लिखा जाएगा। यहाँ चित्रानुसार मान लें कि X व Y कोई दो वस्तुएँ हैं व क्रमित युग्म [Ordered Pair]. (x, y) को $(x, y) = \{x\}, \{x, y\}\}$ द्वारा ही परिभाषित किया जायेगा। यहाँ पर हम x व y को क्रमित युग्म (x, y) को पहला, दूसरा व तीसरा घटक मानते हैं। जब $x = y$ है, तो हमारे पास $(x, x) = \{\{\times\}\}$ भी होगा।

समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Sets)

दो समुच्चयों A, B पर उनके अवयवों के साथ विचार करने पर समुच्चय A व B के अवयव परिवर्तित क्रम के अनुसार अलग-अलग होंगे।

यहाँ सभी क्रमित युग्मों $\{a, b\}$ का समुच्चय K है, जहाँ $a \in A$ व $b \in B$ को A व B का कार्तीय गुणन कहा जाता है। यहाँ हम कार्तीय गुणन को इस प्रकार से लिखेंगे

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ व } b \in B\}$$