Serving Education for Last 40 Years

NEERAJ®

M.E.C. -3 / 103

परिमाणात्मक विधियाँ

(Quantitative Methods)

Chapter Wise Reference Book
Including Many Solved Sample Papers

Based on

I.G.N.O.U.

& Various Central, State & Other Open Universities

By: *Prieti Gupta,* M.Sc.

NEERAJ PUBLICATIONS
(Publishers of Educational Books)

Mob.: 8510009872, 8510009878 E-mail: info@neerajbooks.com
Website: www.neerajbooks.com

MRP ₹ 380/-

Content

परिमाणात्मक विधियाँ
(Quantitative Methods)

S.No.	Chapterwise Reference Book	Page

रैखिक बीजगणित एवं अर्थशास्त्रीय अनुप्रयोग
(Linear Algebra and Economics Application)

सांख्यिकीय विधियाँ - I (Statistical Methods - I)

सांख्यिकीय विधियाँ - II (Statistical Methods - II)

■ ■

Sample Preview
of the
Solved
Sample Question
Papers

Published by:

NEERAJ
PUBLICATIONS
www.neerajbooks.com

QUESTION PAPER

June – 2023

(Solved)

परिमाणात्मक विधियाँ

(Quantitative Methods)

M.E.C.-103

समय : 3 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 100*

नोट: *प्रत्येक भाग से निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

भाग-क

नोट : निम्नलिखित में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रश्न 1. (क) एक फर्म, जो कि केवल एक कारक आगत (श्रम) का प्रयोग करती है, का उत्पादन फलन इस प्रकार है–

$$x = 125L + L^2 - 0.1L^3$$

सीमांत लागत ज्ञात कीजिए, यदि फर्म श्रम की 20 इकाइयाँ लगाती है और मजदूरी दर रु. 90 प्रति इकाई पर स्थिर है।

उत्तर–कारक लागत V को निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है–

$$V = 90L_1 \text{ जबकि L श्रम इकाइयाँ हैं।}$$

$$MC = \frac{dV}{dx}$$

$$= \frac{dV}{dL} \cdot \frac{dL}{dx}$$

$$= \frac{90}{125 + 2L - 0.3L^2}$$

यदि $L = 20$, तो

$$MC = \frac{90}{45} = \text{Rs. } 2$$

(ख) सिद्ध कीजिए यदि $f'(a)$ सीमाबद्ध है, तो $f(x)$ सतत् (अविच्छिन्न) होना चाहिए।

उत्तर–संदर्भ–देखें अध्याय-2, पृष्ठ-15, प्रश्न 1

सहजबोध से कोई भी फलन $f(x)$ सतत् ही होता है, बशर्ते उसका आरेख सतत् हो; यथा, एक सतत् फलन अपने आरेख के किसी भी बिंदु पर कोई विच्छेदन नहीं दर्शाता।

अधिक औपचारिक रूप से, कोई फलन $f(x)$ $x = a$ हेतु सतत् कहलाता है, बशर्ते $\lim_{x\to a} f(x)$ विद्यमान है, शून्येत्तर है और a के बराबार है।

यथा, $f(x)$ के $x = a$ पर सतत होने के लिए हमें प्राप्त करना होगा– $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$

यदि $f(x)$ अपने अनुक्षेत्र में x के प्रत्येक मान के लिए सतत हो तो इसे पूरे अंतराल में सतत् कहा जाता है। विश्लेषणात्मक रूप से $x = a$ पर फलन $f(x)$ सतत् होगा, बशर्ते $f(a)$ अस्तित्ववान है और कोई भी पूर्व-निर्दिष्ट परिणाम ε प्रदत्त है, यद्यपि कितना भी लघु, हम किसी धनात्मक परिणाम δ को निर्धारित कर सकते हैं, जैसे कि x के सभी मानों के लिए $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ जैसे कि $\delta \le \le x \le \le a + \delta$.

प्रश्न 2. अधिकतम–

$$U(z_1, z_2) = \frac{z_1}{1+z_1} + \frac{z_2}{1+z_2}$$

यदि–

$$z_1 \ge 0$$

$$z_2 \ge 0$$

$$P_1 z_1 + P_2 z_2 \le 1$$

क्या तटस्थता वक्र (उदासीनता वक्र) नीचे की ओर ढलान वाले उत्तल और अक्षों को काटते हैं? जाँच कीजिए और अपने उत्तर को उचित सिद्ध कीजिए।

उत्तर–अनधिमान वक्र अधोमुखी अवनत, उत्तल और अक्षों पर काटने वाले हैं। अंतिम स्थिति उपयोगिता फलन के योगात्मक रूप के कारण है और उपयोगिता भूयिष्ठक पर किसी एक वस्तु के 0 उपभोग में परिणत हो सकती है। हम आश्वस्त हैं कि एक सार्वत्रिक भूयिष्ठक अस्तित्व रख सकता है कि इष्टतम पर प्रतिबंध अर्हता का पालन होता है और कि जाँच हेतु बंधनकारी निबाधों की केवल तीन प्रासंगिक स्थितियाँ होती हैं।

कुह्न-टकर स्थितियाँ हैं–

$$\lambda_1 \ (\partial L / \partial \lambda_1) = \lambda_1 z_1 = 0, \ \lambda_1 \ge 0, z_1 \ge 0$$

अनुपूरक सुनम्यता के साथ ...(1)

$\lambda_2\ (\partial L/\partial \lambda_2) = \lambda_2 z_2 = 0,\ \lambda_2 \geq 0, z_2 \geq 0$

अनुपूरक सुनम्यता के साथ ...(2)

$\lambda_3\ (\partial L/\partial \lambda_3) = \lambda_3(I - p_1 z_1 - p_1 z_1) = 0,\ \lambda_1 \geq 0,$ $(I - p_1 z_1 - p_1 z_1) \geq 0,$ अनुपूरक सुनम्यता के साथ ...(3)

$$(\partial L/\partial z_1) = \left(\frac{1}{(1+z_1)^2}\right) + \lambda_1 - \lambda_3$$

$$p_1 = 0 \quad \ldots (4)$$

$$(\partial L/\partial z_2) = \left(\frac{1}{(1+z_2)^2}\right) + \lambda_2 - \lambda_3 p_2$$

$$= 0 \quad \ldots (5)$$

स्थिति 1 : $z_1 > 0, z_2 > 0$ का अर्थ है $\lambda_1 - \lambda_2 = 0.$ समीकरण (4) दर्शाता है $\lambda_3 > 0$, ताकि

समीकरण (4) और (5) $\left(\frac{(1+z_1)}{(1+z_2)}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ देते हैं।

समीकरण (3) जो $z_2 = \left(\frac{(I + p_1 z_1)}{p_2}\right)$ देता है, ऊपर प्रयोग करने से हमें मिलता है

$$\left(\frac{(p_2 + I - p_1 z_1)}{(p_2(1+z_1))}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

अतः सरल उपभोग देते हैं–

$$z_1 = \frac{\left(I + p_2 - (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(p_1 + (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$z_2 = \frac{\left(I + p_1 - (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(p_2 + (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{p_1 (1+z_1)^2} = \frac{1}{p_2 (1+z_2)^2}$$

$z_1 > 0,\ z_2 > 0$ दर्शाता है $I > (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}} - p_1,$ $I > (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}} - p_2$ यदि इनमें से कोई भी अपर्याप्त हो तो हम स्थिति (1) के नियम का पालन नहीं कर रहे।

स्थिति 2 : समीकरण (3) के साथ $z_1 = 0$ दर्शाता है $z_2 = \frac{I}{p_2}$ चूँकि यह धनात्मक है $\lambda_2 = 0$, अतः समीकरण (5) का अर्थ है– $\lambda_3 = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{I}{p_2}\right)^2\right)} p_2$

$\lambda_1 = \lambda_3 p_1 - 1$ ($x_1 = 0$ और समीकरण (4) से), $\lambda_1 = \frac{p_1 p_2}{(p_2 + I)^2} - 1$ चूँकि इसे शून्य से बड़ा होना है, यह अपेक्षित है कि $\frac{p_1 p_2}{(p_2 + I)^2} \geq 1$

यथा $I \leq (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}} - p_2$

उपयोगिता बराबर है–

$$\frac{z_2}{(1+z_2)} = \frac{I}{(p_2 + I)}$$

$$(z_1^*, z_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = \left(0, \frac{I}{p_2}, \frac{p_1 p_2}{(p_2 + I)^2} - 1, 0, \frac{p_2}{(p_2 + I)^2}\right)$$

स्थिति 3: सममिति से हल है–

$$(z_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = \left(\frac{I}{p_1}, 0, 0, \frac{p_1 p_2}{(p_2 + I)^2} - 1, \frac{p_2}{(p_2 + I)^2}\right)$$

और इस स्थिति को बनाए रखने के लिए यह जरूरी है कि

$\frac{p_1 p_2}{(p_2 + I)^2} \geq 1$ अथवा $I \leq (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}} - p_1$

संक्षेपण के लिए, मान लीजिए $p_1 = p_2 = p$, तब $(p_1 p_2)^{1/2} - p_1 = (p_1 p_2)^{1/2} - p_2 = 0$. अतः चूँकि $I > 0$, हम स्थिति 1 का नियम पालन कर रहे हैं और भूयिष्ठक पर $z_1 = z_2 = (I/2p)$ दूसरी ओर मान लीजिए कि $p_1 < p_2$ (विपरीत भी इसी प्रकार आकलित किया जा सकता है)। तब $p_2 > (p_1 p_2)^{1/2} > p_1$.

इस प्रकार, या तो $I > (p_1 p_2)^{1/2} - p_1$, जिस दशा में हम स्थिति (1) का प्रयोग कर सकते हैं, या फिर $I \leq (p_1 p_2)^{1/2} - p_1$ जिस दशा में हम स्थिति (3) का प्रयोग कर सकते हैं। स्थिति (2), जिसमें कि भूयिष्ठक वस्तु-2 की एक धनात्मक मात्रा और वस्तु-1 की शून्य मात्रा का उपभोग कर सकते हैं, लागू नहीं होती।

Sample Preview
of
The Chapter

Published by:

NEERAJ
PUBLICATIONS
www.neerajbooks.com

परिमाणात्मक विश्लेषण विधियाँ
(Quantitative Analysis Techniques)

अंतरक गणन विधि : विषय प्रवेश
(DIFFERENTIAL CALCULUS: INTRODUCTION)

फलन, सीमांत और सातत्य
(Functions, Limit and Continuity)

1

परिचय

अर्थशास्त्र से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए गणितीय ज्ञान एवं तकनीक ने सदैव ही महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाई है। इस अध्याय में फलन, सीमांत और सातत्य की संकल्पनाओं के बारे में चर्चा की गयी है, किंतु अधिक गहराई में न जाकर हम इन संकल्पनाओं को वास्तविक संख्याओं एवं अनानुपातिक संख्याओं के दायरे में रखकर इन पर विचार-विमर्श करेंगे। फलन को सूत्र द्वारा, समाकलन विधि एवं ग्राफ विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। सातत्य, फलन का एक महत्त्वपूर्ण गुणधर्म होता है। किन परिस्थितियों में फलन का सीमांत सतत होता है? इत्यादि पर इस अध्याय में चर्चा की गई है।

अध्याय का विहंगावलोकन

मूल संकल्पनाओं का पुनरावलोकन

समुच्चय–स्पष्ट एवं सुपरिभाषित वस्तुओं के संकलन को समुच्चय कहते हैं तथा संकलित वस्तुएँ समुच्चय का अवयव कहलाती हैं।

उदाहरण–10 से कम सम पूर्णांकों का समुच्चय

S : $\{2x \mid x$ एक पूर्णांक है और $2x < 10\}$

इसके अवयव हैं $\rightarrow (2, 4, 6, 8)$

चर–किसी भी संख्या को निरूपित करने के लिए हम चर का उपयोग करते हैं। इसे अंग्रेजी के अक्षरों द्वारा दर्शाया जाता है। जैसे $x, y, a, b,$ आदि। चरों का मान विभिन्न परिस्थितियों में भिन्न होता है।

किसी संख्या a से b तक तक सभी संख्या मानों के लिए चर x को **सतत चर** कहते हैं। अर्थात

यदि $a \le x \le b$ या $x \notin [a, b]$ किसी चर के सभी संभव मानों का समुच्चय **प्रांत** होता है एवं **परिसर** ऐसे मानों का समुच्चय होता है, जो $f(x)$ ले सकता है।

अचर–पूरी गणितीय संक्रिया के दौरान यदि कोई निरूपण एक ही संख्यात्मक मान बनाए रखता है, तो उसे **अचर** कहते हैं। उदाहरण के लिए $|x|$ का मान धनात्मक और ऋणात्मक संख्या के लिए सदैव समान ही रहता है। अर्थात

$$|x| = x \text{ यदि } x \ge 0$$
$$= -x \text{ यदि } x < 0$$

उदाहरण $\quad |-5| = 5$ और $|5| = 5$

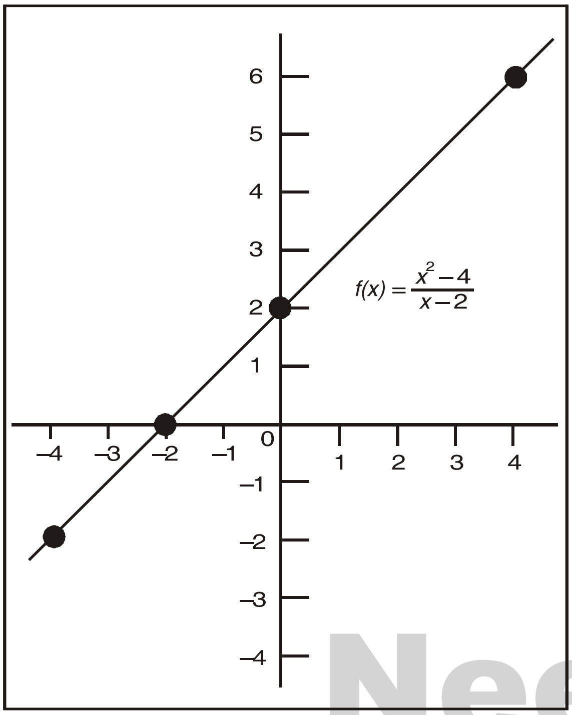
फलन

एक दूसरी राशि y के लिए x का फलन अपने प्रांत में x के लिए एक निश्चित रूप से परिभाषित होता है। इसमें चर x स्वतंत्र चर तथा y पराश्रयी चर कहलाता है।

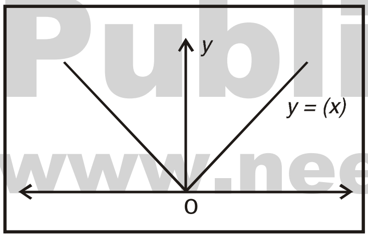
उदाहरण–फलन $f(x) = 20\,x - 5x^2$, x के प्रत्येक मान के लिए परिभाषित है, जबकि x एक वास्तविक संख्या है अर्थात इस फलन का प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

फलन का आलेख–किसी फलन $y = f(x)$ का आलेख बनाने के लिए, परिभाषित प्रांत x के अनुरूप y का मान ज्ञात करने की आवश्यकता होती है।

उदाहरण–फलन $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ का आलेख निम्न प्रकार है–



उदाहरण–$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ यदि } x \geq 0 \\ -x \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$



परिबंधित फलन व उनके परिबंधन–अंतराल (a, b) में परिभाषित किसी फलन $f(x)$ के लिए यदि कोई शून्येतर संख्या इस प्रकार है कि

$$f(x) \leq p$$

अत: p फलन का उच्च परिबंधन होता है। इसी प्रकार अन्य शून्येतर संख्या q यदि इस प्रकार है कि

$$f(x) \geq q$$

इसमें q निम्न परिबंधित होता है। दोनों प्रकार के परिबंधनों की उपस्थिति में $f(x)$ को परिबंधित कहा जाता है।

उदाहरण– $f(x) = x + 5; x \notin (-1,1)$

उच्च परिबंधन = 4

निम्न परिबंधन = 6

एकरूप फलन–एक प्रकार से घटने और बढ़ने को एकरूप फलन कहते हैं। वास्तविक संख्याओं x और y के लिए यदि $x \leq y$ का फलन $f(x) \leq f(y)$ है, तो फलन एकरूप कहलाता है। फलन $f(x) = x - 1$ और $f(x) = \frac{1}{x}$ एकरूप फलन है।

प्रतिलोम फलन–यदि दो फलन f और f^{-1} इस प्रकार हैं कि $f: a \to b$, तो $f^{-1}; b \to a$ तो f^{-1}, f का प्रतिलोम फलन कहलाता है। यदि $f(x) = y$, तो $f^{-1}(y) = x, f(x)$ का प्रतिलोम फलन कहलाता है।

फलन के प्रकार

1. बीजगणितीय फलन–वे फलन जिनमें किसी दी गयी संख्या में विभिन्न पद प्रमुख गणितीय संक्रियाओं, जैसे–जोड़, घटा, गुणा अथवा भाग को प्रयुक्त करके संलग्नित होते हैं, बीजगणितीय फलन कहलाते हैं। अचर फलन, बहुपद इत्यादि बीजगणितीय फलन होते हैं।

***(i)* अचर फलन**–एक ही अवयव वाले परिसर का फलन अचर फलन कहलाता है।

***(ii)* बहुपद फलन**–$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_n$ के रूप वाला फलन बहुपद फलन कहलाता है। जबकि n एक धनात्मक वास्तविक संख्या है और $a_0, a_1, a_2 \ldots.$ स्थिर राशि है। उदाहरण– $5x^3 - 6x^2 + 4x - 2$, बहुपद फलन है।

रेखीय फलन का आलेख एक सीधी रेखा है जबकि द्विघात फलन का आलेख परवलय होता है। बहुपद फलन आनुपातिक फलन भी होता है। आनुपातिक फलन $xy = a$ के आलेख को आयताकार परवलय के रूप में आलेखित किया जाता है।

2. गैर-बीजगणितीय फलन–वे फलन जो बीजगणितीय नहीं होते, गैर-बीजगणितीय फलन कहलाते हैं। घातीय लघुगुणकीय एवं त्रिकोणमितीय फलन गैर-बीजगणितीय फलन के उदाहरण हैं।

सीमांत की अवधारणा

फलन की सातत्यता, सीमांत की अवधारणा के द्वारा परिभाषित की जाती है। जैसे ही x, a की ओर अभिमुख होता है, फलन $f(x)$ का सीमांत l होता है। इसे निम्न प्रकार से दर्शाया गया है–

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

उपर्युक्त वाक्यांश का अर्थ है कि जैसे-जैसे x एक अचर राशि a पर पहुँचता है (किन्तु $x \neq a$), वैसे ही $f(x)$ भी l राशि के समीप पहुँचता है।

उदाहरण–

$$\lim_{x \to -2} f(x) \text{ जबकि } f(x) = \begin{cases} -3x \text{ यदि } x \neq -2 \\ 1 \text{ यदि } x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} -3x$$

$$= -3 \lim_{x \to -2} x$$

$$= -3(-2) = 6$$

***(a)* फलन का दायाँ सीमांत**–फलन के दाएँ सीमांत से तात्पर्य है कि x एक अचर राशि a के अधिक मानों से a की ओर बढ़ता है। इसे निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है–

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ अथवा } \lim_{x\to a+0} f(x)$$

***(b)* फलन का बायाँ सीमांत**–फलन के बाएँ सीमांत से तात्पर्य है कि x एक अचर राशि a के कम मानों से a की ओर बढ़ता है। अर्थात

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ अथवा } \lim_{x\to a-0} f(x)$$

फलन के सीमांत का अस्तित्व रखने के लिए फलन के दाएँ सीमांत और बाएँ सीमांत का अस्तित्व में एवं समान रूप से होना अनिवार्य है। इसका अर्थ यह है कि

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x)$$

उदाहरण 1. ज्ञात कीजिए क्या $\lim_{x\to 0} f(x)$ अस्तित्व रखता है, यदि

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

हल–यहाँ $f(x)$, $x = 0$ के लिए परिभाषित नहीं है। $x < 0$ के लिए $|x| = -x$, तो

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

$x > 0$ के लिए $|x| = x$, तो

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$$

यहाँ $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

अत: यह सिद्ध होता है कि $\lim_{x\to 0} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 2. यदि $(x) = \begin{cases} x-[x], \text{यदि } x < 3 \\ 7-2x, \text{यदि } x > 3 \end{cases}$, तो ज्ञात कीजिए कि क्या $\lim_{x\to 3} f(x)$ का अस्तित्व है अथवा नहीं।

हल–फलन का बायाँ सीमांत निकालने पर

$$(x < 3), f(x) = x - [x]$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x - [x])$$
$$= \lim_{x\to 3^-} x - \lim_{x\to 3^-} [x]$$
$$= 3 - 2 = 1$$

फलन का दायाँ सीमांत निकालने पर $(x > 3)$, $f(x) = 7 - 2x$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (7 - 2x)$$
$$= 7 - 2 \times 3$$
$$= 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$$

अत: $\lim_{x\to 3} f(x)$ का अस्तित्व है।

***(c)* अनंत की ओर प्रवृत्त फलन**–अनंत की ओर प्रवृत्त फलन के सीमांत को परिभाषित करने के लिए हम वास्तविक रेखा R को इस प्रकार बढ़ाते हैं कि $R \cup \{-\infty, \infty\}$। यदि $f(x)$ कोई वास्तविक फलन है, तो x के अनंत की ओर अभिमुख होने को निम्न प्रकार से दर्शाते हैं–

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

केवल और केवल सभी $\varepsilon > 0$ के लिए $S > 0$ इस प्रकार होता है कि $1 f(x) - L \mid \angle \varepsilon$, जबकि $x < S$

इसी प्रकार ऋणात्मक अनंत की और अभिमुख होने पर

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L,$$

सभी $\varepsilon > 0$ के लिए $S > 0$ इस प्रकार होता है कि $f(x) - L \mid < \varepsilon$, जबकि $x < S$

उदाहरण– $\quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

***(d)* सीमांत पर आधारित प्रमेय**

माना, $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ और $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$,

1. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = l_1 \pm l_2$
2. $\lim_{x\to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x) = l_1 . l_2$
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} (l_2 \neq 0)$
4. $\lim_{x\to a} [c\, f(x)] = c. \lim_{x\to a} f(x)$
5. यदि $h(x) = c$, तो $\lim_{x\to a} (x) = c$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} c = c$

6. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
7. $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$
8. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

9. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ (जबकि $a > 0$)

उदाहरण–

(i) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$

$= \lim_{x\to 1}(x+1)$

$= 1 + 1 = 2 \{\because x \to 1$

(ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(5\times\dfrac{\sin 5x}{5x}\right)$

$= 5\times \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$

$= 5 \times 1 = 5$

(ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}.2$

माना $y = 2x$, तो

$= \lim_{y\to 0}\dfrac{e^y - 1}{y}.2$

$= 1.2 = 2 \{\because \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1\}$

सातत्य

फलन $f(x)$, बिंदु $x = a$ पर सतत होता है, यदि

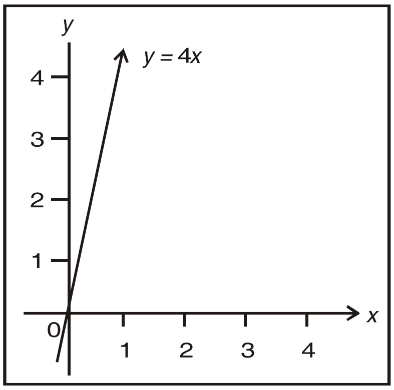
(i) $f(a)$ पूर्णतः परिभाषित हो।

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है।

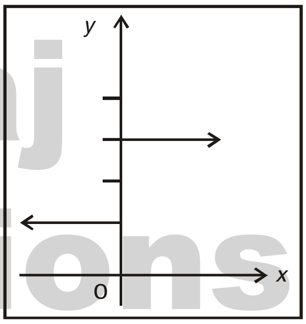
किसी बिंदु पर सतत न होने की स्थिति में फलन को उस बिंदु पर असातत्य रखने वाला कहा जाता है। यदि f और g_1 $x = a$ पर सतत है तो $f \pm g$, fg और f/g $(g(a) \neq 0)$ भी $x = a$ पर सतत होते हैं।

एक बहुपद फलन $y = p(x)$, x के प्रत्येक बिंदु पर सतत होता है।

उदाहरण 1. $y = 4x$ का आलेख यह प्रदर्शित करता है कि x के प्रत्येक बिन्दु पर यह फलन सतत है।



उदाहरण 2. यदि $y = f(x) = \begin{cases} 3, & x > 0 \\ 1, & x \le 0 \end{cases}$ तो फलन $x = 0$ पर असातत्य है।



सतत फलनों के कुछ गुणधर्म

1. दो सतत फलनों का योग, अंतर व गुणनफल किसी भी शून्येतर संख्या के लिए एक सतत फलन होता है।

2. दो सतत फलनों का भागफल सतत होता है, बशर्ते उस बिन्दु पर हर का मान शून्य न हो।

3. यदि फलन, मुक्त अंतराल (a, b) के प्रत्येक बिंदु पर सतत है, तो फलन को सतत ही कहा जाएगा।

4. किसी अंतराल में सतत फलन, उस अंतराल के उच्च और निम्न परिबंधन प्राप्त कर लेता है।

उदाहरणतः फलन $\sin^{-1} x$ और $\cos^{-1} x$, $[-1,1]$ अंतराल में सतत है।

इसी प्रकार फलन $\sec^{-1} x$ और $\text{cosec}^{-1} x_1$ अंतराल $(-\infty, -1] \cup [-1, 1]$ में सतत हैं।

बोध-प्रश्न

प्रश्न 1. चर व अचर के बीच अंतर सोदाहरण स्पष्ट करें।