



NEERAJ®

M.E.C.-203

परिमाणात्मक विधियाँ

(Quantitative Methods)

Chapter Wise Reference Book
Including Many Solved Sample Papers

Based on

I.G.N.O.U.

& Various Central, State & Other Open Universities

By: Bhavya Gupta



**NEERAJ
PUBLICATIONS**

(Publishers of Educational Books)

Mob.: 8510009872, 8510009878 E-mail: info@neerajbooks.com

Website: www.neerajbooks.com

MRP ₹ 380/-

Content

परिमाणात्मक विधियाँ (Quantitative Methods)

Sample Question Paper-1 (Solved)	1
Sample Question Paper-2 (Solved)	1
Sample Question Paper-3 (Solved)	1
Sample Question Paper-4 (Solved)	1

<i>S.No.</i>	<i>Chapterwise Reference Book</i>	<i>Page</i>
खंड-1 आधारभूत गणित की समीक्षा (REVIEW OF BASIC MATHEMATICS)		
1.	गणित की आधारभूत अवधारणाएँ (Fundamental Concepts of Mathematics)	1
2.	गणित की आधारभूत विधियों का सिंहावलोकन (Overview of Basic Methods of Mathematics)	8
3.	संबंध एवं फलन (Relations and Functions)	13
4.	निर्देशांक ज्यामिति तथा फलनों की प्रस्तुति (Coordinate Geometry and Representation of Functions)	20
खंड-2 रेखीय बीजगणित (LINEAR ALGEBRA)		
5.	आव्यूह बीजगणित (Matrix Algebra).....	35
6.	सदिश विश्लेषण (Vector Analysis).....	48
7.	सदिश और आव्यूह (Vectors and Matrices).....	52
8.	रैखिक समीकरणों के सदिश और आव्यूह निरूपण..... (Vector and Matrix Representations of Linear Equations)	57
खंड-3 कलन (CALCULUS)		
9.	सीमाएं एवं सातत्य (Limit and Continuity)	62
10.	अवकलन गणित : एक चर के फलन (Differential Calculus: Functions of One Variable)	69
11.	अवकलन गणित : अनेक चरों के फलन..... (Differential Calculus: Functions of Several Variables)	78
12.	समाकलन : परिचय एवं प्रविधियाँ (Integration: Introduction and Techniques)	85
खंड-4 वास्तविक विश्लेषण (REAL ANALYSIS)		
13.	वास्तविक विश्लेषण (Real Analysis).....	97

<i>S.No.</i>	<i>Chapterwise Reference Book</i>	<i>Page</i>
14.	अनेक चरों का कलन (Calculus of Several Variables).....	106
15.	मैट्रिक समष्टि तथा बिंदु समुच्चय टोपोलॉजी की मौलिक संकल्पनाएँ (Basic Concepts of Metric Space and Point Set Topology)	116
खंड-5 चरम मूल्य तथा इष्टतमीकरण (EXTREME VALUES AND OPTIMIZATION)		
16.	इष्टतमीकरण : एक परिचय (Optimization: An Introduction).....	122
17.	अव्यवरोधी तथा व्यवरोधी इष्टतमीकरण (Unconstrained and Constrained Optimization)	130
18.	इष्टतमीकरण में उच्च वस्तु-I (Advanced Topics in Optimization-I).....	137
19.	इष्टतमीकरण में उच्च वस्तु-II (Advanced Topics in Optimization-II).....	143
खंड-6 आर्थिक प्रवैगिकी (ECONOMIC DYNAMICS)		
20.	अन्तर एकीकरण : सिद्धान्त एवं आर्थिक प्रयोग (Difference Equations: Theory and Economic Applications)	149
21.	अवकल समीकरण (Differential Equations).....	157
खंड-7 प्रावैगिक इष्टतमीकरण (DYNAMIC OPTIMIZATION)		
22.	अंतर्कालिक अभीष्टीकरण-I (Intertemporal Optimization-I).....	162
23.	अंतर्कालिक अभीष्टीकरण-II (Intertemporal Optimization-II).....	170
24.	गतिमान अभीष्टीकरण के आर्थिक प्रयोग (Economic Applications of Dynamic Optimization)	178
खंड-8 प्रायिकता तथा प्रायिकता के वितरण (PROBABILITY AND PROBABILITY DISTRIBUTIONS)		
25.	प्रायिकता सिद्धांत (Probability Theory).....	184
26.	प्रायिकता बंटन-I (Probability Distributions-I).....	192
27.	प्रायिकता बंटन-II (Probability Distributions-II).....	196
खंड-9 अनुमानिक सांख्यिकी (INFERENCE STATISTICS)		
28.	प्रतिचयन सिद्धांत (Sampling Theory).....	202
29.	प्रतिचयन बंटन (Sampling Distributions).....	210
30.	आकलन (Estimation).....	216
31.	परिकल्पना की जाँच (Hypothesis Testing).....	223

**Sample Preview
of the
Solved
Sample Question
Papers**

Published by:



**NEERAJ
PUBLICATIONS**

www.neerajbooks.com

Sample
QUESTION PAPER - 1

(Solved)

परिमाणात्मक विधियाँ
(Quantitative Methods)

M.E.C.-203

समय : 3 घण्टे]

[अधिकतम अंक : 100

नोट: कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

प्रश्न 1. डी मार्गन के नियम बताएं और सिद्ध कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-1, पृष्ठ-6, प्रश्न-2

प्रश्न 2. एक दो अंकों की संख्या के अंकों में 4 का अंतर है। यदि अंकों को आपस में बदल दिया जाए, तो प्रारंभिक संख्या परिणामी संख्या के दोगुने से एक कम है। प्रारंभिक संख्या क्या है?

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-2, पृष्ठ-11, प्रश्न-3

प्रश्न 3. निम्नलिखित में से प्रत्येक संबंध के लिए बताएं कि क्या यह सममित है, सममित नहीं है, सममित विरोधी है-

(i) सभी त्रिभुजों के समुच्चय पर 'के सर्वांगसम-है' का संबंध

(ii) संख्याओं पर संबंध 'से कम है या के बराबर है' (\leq)।

(iii) संबंध 'का भाई है', यदि आधारभूत समुच्चय X = सभी पुरुष मानव प्राणियों का समुच्चय है।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-3, पृष्ठ-15, प्रश्न-3

प्रश्न 4. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-5, पृष्ठ-41, प्रश्न-4

प्रश्न 5. निम्न फलनों के लिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ और $\frac{d^3y}{dx^3}$ ज्ञात कीजिए-

(i) $dy/dx = -e^x + 4x^3$; $\frac{d^2y}{dx^2} = d(-e^x + 4x^3)/dx = e^x + 12x^2$

(ii) $y = 3x^2 \log(2x)$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-10, पृष्ठ-74, प्रश्न-2

प्रश्न 6. मान ज्ञात कीजिए- $\int \frac{3x+11}{x^2-x-6} dx$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-12, पृष्ठ-92, प्रश्न-2

प्रश्न 7. फलन $f(x) = \cos(x)$ के लिए

(क) रैखिक और द्विघाती सन्नियन का आकलन कीजिए।

(ख) फलन के लिए मैकलॉरीन शृंखला का विस्तार कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-14, पृष्ठ-112, प्रश्न-10

प्रश्न 8. $z = 3x^2 + 6xy + 7y^2$ के लिए स्थिर मान ज्ञात कीजिए तथा जाँच कीजिए कि क्या ये उच्चतम या निम्नतम है।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-16, पृष्ठ-126, प्रश्न-4

प्रश्न 9. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन उत्तल है या अवतल है-

$f(u)4u_1^1 + 3u_2^2 + u_3^3 - 6u_1u_2 + u_1u_3$

$-\frac{u_1}{2} - 2u_2 + 15$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-18, पृष्ठ-141, प्रश्न-3

प्रश्न 10. निम्नलिखित समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए-

(क) $yt + 4y_{t-2} = 0, y = 12, 11$ क्रमशः $t = 0$; है।

(ख) $yt = 2y_{t-2}, y = 0, 1$ क्रमशः $t = 0, 1$ है।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-20, पृष्ठ-154, प्रश्न-7

प्रश्न 11. एक अच्छी तरह से फेंटी हुई ताश की गड्डी से दो पत्ते यादृच्छिक रूप से खींचे जाते हैं। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(क) दो पत्ते लाल हैं

(ख) एक पान है और दूसरा ईट

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-25, पृष्ठ-187, प्रश्न-3

प्रश्न 12. माध्य 100 और मानक विचलन 20 की एक समष्टि में से माप 225 के यादृच्छिक प्रतिदर्श निकाले जाते हैं। प्रतिदर्श मान्य के माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-28, पृष्ठ-207, प्रश्न-3

■ ■

Sample

QUESTION PAPER - 2

(Solved)

परिमाणात्मक विधियाँ
(Quantitative Methods)

M.E.C.-203

समय : 3 घण्टे]

[अधिकतम अंक : 100

नोट: कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

प्रश्न 1. (i) अतिपरवलय तथा परवलय के बीच अंतर कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-4, पृष्ठ-30, प्रश्न-13

(ii) जिस अति-परवलय का समीकरण $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$ हो, उसका केन्द्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-4, पृष्ठ-30, प्रश्न-15

प्रश्न 2. रैखिक समीकरण निकाय

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$2x + 4y + z = 7$$

$$3x + 2y + 9z = 14$$

का हल क्रैमर के नियम द्वारा ज्ञात कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-5, पृष्ठ-42, प्रश्न-6

प्रश्न 3. मान लीजिए $U = [u, v, w, x, y, z]$

(i) U के उपसमुच्चय की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) U के उचित गैर-शून्य उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-1, पृष्ठ-5, प्रश्न-9

प्रश्न 4. निम्नलिखित वास्तविक मान फलनों के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = +\sqrt{(9-x^2)}$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-3, पृष्ठ-17, प्रश्न-8

प्रश्न 5. यदि $a = \begin{bmatrix} 2a \\ -a \\ 3a \\ a \end{bmatrix}$ और $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध

कीजिए कि $\frac{\partial}{\partial x}(a \cdot x) = a$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-7, पृष्ठ-55, प्रश्न-2

प्रश्न 6. ज्ञात कीजिए $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-9, पृष्ठ-67, प्रश्न-3

प्रश्न 7. निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिए-

$$\int \frac{1}{2} ((1 - \cos(2x)) \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) dx$$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-12, पृष्ठ-93, अभ्यास प्रश्न-2

प्रश्न 8. मान लीजिए कि किसी टंकी में t मिनट में पानी का परिमाण $V(t) = 5t^2 - 64t + 45$ से ज्ञात होता है, तो

निम्नलिखित का आकलन कीजिए-

(a) $t = 3$ मिनट पर टंकी में पानी का परिमाण बढ़ रहा या घट रहा है?

(b) $t = 7$ मिनट पर टंकी में पानी का परिमाण बढ़ रहा या घट रहा है?

(c) $t = 3$ या $t = 7$ मिनट में किस समय टंकी में पानी के परिमाण में परिवर्तन की दर किस समय अधिक है।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-14, पृष्ठ-114, प्रश्न-3

प्रश्न 9. $1 + 2 \sin x + 3 \cos^2 x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-16, पृष्ठ-127, प्रश्न-1

प्रश्न 10. दर्शाइए कि क्या यह उत्तल है या अवतल है या दोनों में कोई नहीं है-

(i) $f(u) = 10 - u^2$

(ii) $f(u_1, u_2) = 5u_1 + 2u_2^2$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-18, पृष्ठ-141, प्रश्न-2

प्रश्न 11. समीकरण $y_{t+1} + \frac{1}{4} y_t = 5$ का हल ज्ञात कीजिए यदि $y_0 = 2$

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-20, पृष्ठ-155, प्रश्न-3

प्रश्न 12. फलन $\int_0^1 \{ [x'(t)]^2 + 10x(t) \cdot t \} dt$ के लिए आत्यंतिक मान ज्ञात कीजिए जबकि $x(t_0) = 2$ और $x(t_f) = 3$ हो

उत्तर-संदर्भ-देखें अध्याय-22, पृष्ठ-166, प्रश्न-2

■ ■

Sample Preview of The Chapter

Published by:



**NEERAJ
PUBLICATIONS**

www.neerajbooks.com

कतिपय विशिष्ट समुच्चय : सार्वत्रिक समुच्चय, शून्य समुच्चय, घातांक समुच्चय और उत्तल समुच्चय

(क) **सार्वत्रिक समुच्चय**—सार्वत्रिक समुच्चय एक संग्रह है और अक्सर U होता है। नतीजतन, परिभाषा के अनुसार, विचाराधीन प्रत्येक समुच्चय X सार्वत्रिक समुच्चय U का एक उपसमुच्चय होगा।

(ख) **खाली या शून्य समुच्चय**—एक समुच्चय में तत्वों की संख्या शून्य हो सकती है। समुच्चय की हमारी परिभाषा के अनुसार, निम्नलिखित समुच्चय $S = \{x: x \text{ एक सम पूर्णांक है और } x^2 = 9\}$ है। एक शून्य समुच्चय को मानक संकेतन \emptyset या $\{\}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

(ग) **किसी समुच्चय का घातांक समुच्चय**—किसी दिए गए समुच्चय के सभी उपसमुच्चय के समुच्चय को घातांक समुच्चय कहा जाता है।

(घ) **उत्तल समुच्चय**—किसी स्थान में ऐसे दो बिंदुओं के समुच्चय को उत्तल समुच्चय कहा जाता है, जहां समुच्चय में किन्हीं दिए हुए दो बिंदुओं के लिए उन्हें मिलने वाली रेखा इसी समुच्चय के भीतर स्थित हो।

परिमाणक और तार्किक संकेत/संचालक

परिमाणक और तार्किक संकेत पूरे गणित में अक्सर दिखाई देते हैं।

(क) **परिमाणक**

$(\forall x).x \in X$ सभी $x \in X$ के लिए दर्शाता है।

$(\exists x).x \in X$ कुछ $x \in X$ के लिए दर्शाता है।

$(\exists x \in X)$ में कोई x मौजूद नहीं है या 'X' में कोई x नहीं है, जो संतुष्ट करता हो।

(ख) **तार्किक संकेत**

$A \rightarrow B$ यदि A है तो B' दर्शाता है।

' $A \leftrightarrow B$ ' A को दर्शाता है यदि और केवल यदि B',

' $A \leftrightarrow B$ ', $A \rightarrow B$ और $B \rightarrow A$ दोनों के संयुक्त रूप से बराबर है।

कुछ अवधारणात्मक स्पष्टीकरण और व्याख्याएं

इस उपधारा और 'ऑपरेशन' में विभिन्न 'संबंध' धारणाओं की तुलना की गई है, समुच्चय प्रचालन : सम्मिलन, सर्वनिष्ठ/प्रतिच्छेदन, अंतर और पूरकता, अधिक स्पष्टीकरण : संचालन, संकार्य (ऑपरेंड), तर्क, इनपुट, मूल्य, परिणाम और प्रचालन बनाम संकार्य (आउटपुट कॉन्ट्रॉ ऑपरेंड)।

'संबंध' और 'प्रचालन' की अवधारणाओं के बीच अंतर

समुच्चय—उदाहरण के लिए, पुरुष-संबंध में एक व्यक्ति शामिल होता है, जो इसे समानता 1 का संबंध बनाता है, जबकि संबंध-पुरुष-में दो लोगों को शामिल करता है, जो इसे समानता 2 का संबंध बनाता है। एक संबंध किसी तथ्य को सही अथवा गलत के रूप में व्यक्त करता है।

समुच्चय X पर सक्रिया संबंध के समान ही है। ऑपरेशन की गंभीरता इस बात से निर्धारित होती है कि X पर कोई ऑपरेशन कितनी बार X के क्रॉस-प्रोडक्ट को अपने साथ मैप करता है। हालांकि यह X का एक तत्व ही मान के रूप में वापस देता है।

समुच्चयों पर संचालन : सम्मिलन, सर्वनिष्ठ अंतर, पूरकता

(क) **दो समुच्चयों X और Y का मिलन**— $X \cup Y$ को $X \cup Y = \{x: x \in X \text{ or } x \in Y\}$ के रूप में परिभाषित किया गया है।

X और Y उदाहरण के लिए, यदि $X = \{1, 2, 3, 4\}$ और $Y = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, तो $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$ 2 और 3 जैसे तत्व, जो X और Y दोनों में घटित होते हैं, $X \cup Y$ में केवल एक बार दिखाई देते हैं, क्योंकि किसी सेट के प्रतिनिधित्व में तत्वों को दोहराया नहीं जाता है।

(ख) **दो समुच्चयों X और Y के प्रतिच्छेदन**— $X \cap Y$ को $X \cap Y = \{x : x \in 2, 5, 8, 3, 9\}$ और $X \cap Y = \{2, 3\}$,

(ग) **दो समुच्चयों X और Y के अंतर**— $X - Y$ को $X - Y = \{x: x \in X \text{ और } x \notin Y\}$ के रूप में परिभाषित किया गया है। उदाहरण के लिए, यदि $X = \{1, 2, 3, 4\}$ और $Y = \{2, 5, 8, 3, 9\}$, तो $X - Y = \{1, 4\}$ और $Y - X = \{5, 8, 9\}$

(घ) **यूनरी समुच्चय प्रचालक 'पूरक'**— $X' Y'$ के पूरक' को दर्शाता है।

'एक समुच्चय का पूरक' 'दो समुच्चयों का अंतर' का एक विशिष्ट उदाहरण है। हमें 'समुच्चय के पूरक' को परिभाषित करने के लिए सार्वत्रिक समुच्चय U का मूल्य जानने की जरूरत है, जो कि विशिष्ट संदर्भ में ध्यान में रखा जाने वाला सबसे बड़ा समुच्चय है। यदि X को X' द्वारा दर्शाया गया है और U का अर्थ अध्ययन के तहत सार्वभौमिक समुच्चय है, तो X' के पूरक को UX के रूप में परिभाषित किया गया है।

अधिक स्पष्टीकरण

(i) **संकार्य/तर्क/इनपुट; मान/परिणाम/आउटपुट**—उपर्युक्त उदाहरणों में से एक में, हमने उल्लेख किया है कि यदि $X = \{1, 2, 3, 4\}$ और $Y = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, तो $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$ । मान $\{1, 2, 3, 4\}$ और $\{2, 3, 5, 8, 9\}$, जो यूनियन के संचालन के लिए इनपुट के रूप में दिए जाते हैं, आमतौर पर संकार्य कहलाते हैं।

(ii) **सक्रिया बनाम प्रचालन**—सक्रिया और प्रचालन की दो अवधारणाएँ काफी समान हैं और अक्सर एक-दूसरे के लिए भ्रमित होती हैं। हमारे उद्देश्य के लिए, संघ के प्रतीक अर्थात् U को प्रचालक कहा जाता है।

संख्याएँ : प्राकृत से जटिल तक

कतिपय मानक संख्या समुच्चय

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ प्राकृत/गणना संख्याओं का समुच्चय कहलाता है।

$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ पूर्ण संख्याओं का समुच्चय कहलाता है।

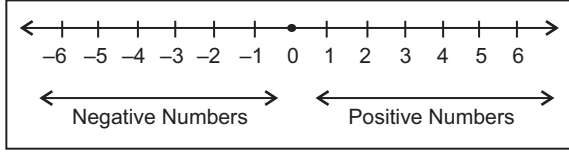
$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ पूर्णाकों का समुच्चय कहलाता है,

$Q = \{x: x = p/q \text{ with } q \neq 0 \text{ और } p, q \in Z\}$ को परिमेय संख्याओं का समुच्चय कहा जाता है।

R, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

रैंड द्वारा दर्शाए गए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का ज्यामितीय अर्थ इस प्रकार है—

एक सीधी रेखा पर दो अलग-अलग स्थानों को चिह्नित करें, बाएँ निशान को 0 और दाएँ निशान को 1 के रूप में निर्दिष्ट करें। फिर, सीधी रेखा पर प्रत्येक बिंदु (दोनों दिशाओं में अनंत रूप से फैला हुआ) एक वास्तविक पूर्णांक के अनुरूप होना संभव है।



वास्तविक संख्या अंतराल

3 और 7.5 के बीच सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अंतराल $[3, 7.5]$ द्वारा निर्दिष्ट किया गया है और इसमें सीमा संख्या 3 और 7.5 दोनों भी शामिल हैं। एक बंद अंतराल ऐसा ही एक अंतराल है।

अंतराल $]3, 7.5]$ (जिसे कभी-कभी $[3, 7.5]$ के रूप में लिखा जाता है) के भीतर सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को 3 से 7.5 तक की संख्या कहा जाता है, जिसमें 7.5 भी शामिल है, लेकिन 3 नहीं।

जटिल संख्याएँ

जटिल संख्याओं का समुच्चय $x^2 + 1 = 0$ प्रकार के समीकरणों को हल करने के प्रयासों के संदर्भ में विकसित हुआ, जिसके लिए कोई वास्तविक संख्या समाधान मौजूद नहीं है। एक नए प्रकार की संख्या i पेश की गई, जिसके लिए $i^2 = -1$ मान लिया गया। फिर C को $C = \{z: z = x + iy: x, y \in R\}$ के रूप में परिभाषित किया गया है।

संख्या विविध

संख्या (उदाहरणतः: 3, -12, 8.7, $2/3$, $\sqrt{2}$, π और $7 - 3i$, जहां 3 एक प्राकृतिक संख्या है, -12 एक पूर्णांक है, 8.7 और $2/3$ में से प्रत्येक एक परिमेय संख्या है, $\sqrt{2}$ और π में से प्रत्येक एक अपरिमेय संख्या है। प्रत्येक संख्या 3, -12, 8.7, $2/3$, $\sqrt{2}$, π एक वास्तविक संख्या है।

क्रमबद्ध क्षेत्र के रूप में वास्तविक संख्याओं के गुणधर्म

(क) R , वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, दो द्विआधारी प्रचालनों '+' और 'x' के संबंध में निम्नलिखित गुणों (फील्ड के रूप में) को संतुष्ट करता है—

$$1. \text{ बँड गुण } -x + y \in R \text{ और } x \times y \in R,$$

$$2. \text{ साहचर्य गुण } -(x + y) + z = x + (y + z); (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

(ख) R , वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, दो द्विआधारी प्रचालनों '+' और 'x' और द्विआधारी संबंध '<' के संबंध में अतिरिक्त रूप से निम्नलिखित गुणों (एक ऑर्डर किए गए फील्ड के रूप में) को संतुष्ट करता है।

परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

(क) परिमेय का सांत दशमलव निरूपण— $3/8$ के बारे में सोचें। हम जानते हैं कि इसे दशमलव संकेतन में 0.375 के रूप में लिखा जाता है। इस तथ्य के कारण कि इसमें अंकों की केवल एक सीमित संख्या है, इसलिए प्रस्तुतीकरण समाप्त हो रहा है।

(ख) तर्कसंगत संख्याओं का गैर-समाप्ति आवर्ती/आवर्ती दशमलव प्रस्तुतिकरण— $7/3$ को दशमलव संकेतन में 2.333... के रूप में लिखा जाता है, जहां अंक 3 खुद को अनिश्चित काल तक दोहराता है। इसका मतलब यह है कि दशमलव प्रतिनिधित्व

गैर-समाप्त नहीं है, फिर भी अनुक्रम में केवल एक दोहरावा वाला अंक, 3 होता है।

वास्तविक संख्या घातांकीकरण

हम जानते हैं कि अंकन x^3 का अर्थ $x \cdot x \cdot x$, है x को स्वयं से तीन गुना गुणा किया गया। सामान्य तौर पर, $n \in N$ के लिए, अंकन x^n का अर्थ x को स्वयं से n बार गुणा किया जाता है। तब x को x^n का आधार कहा जाता है और n को x^n का घातांक या घात कहा जाता है।

बोध प्रश्न

प्रश्न 1. निम्नलिखित में से कौन-सा संग्रह समुच्चय है? अपने उत्तर के औचित्य को सिद्ध कीजिए।

- M अक्षर से शुरू होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह।
- Z अक्षर से शुरू होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह।
- विश्व के दस सबसे प्रतिभाशाली जीवित लेखकों का संग्रह।
- दुनिया के ग्यारह सबसे प्रसिद्ध फुटबॉल खिलाड़ियों की एक टीम।

- {1, 2, 2, 3}
- {1, 2, {2, 3}, 3}

उत्तर—(i) M अक्षर से शुरू होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह—यह एक समुच्चय है, क्योंकि इसमें अलग-अलग तत्व शामिल हैं—[मार्च, मई]

(ii) Z अक्षर से शुरू होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह—यह एक खाली समुच्चय है, क्योंकि ऐसे कोई महीने नहीं हैं, जो Z अक्षर से शुरू होते हैं। एक खाली समुच्चय अभी भी एक सेट है।

(iii) दुनिया के दस सबसे प्रतिभाशाली जीवित लेखकों का संग्रह—यह एक समुच्चय है या नहीं, यह इस बात पर निर्भर करता है कि दस सबसे प्रतिभाशाली जीवित लेखकों की एक विशिष्ट, सहमत सूची है या नहीं। यदि ऐसी कोई सूची मौजूद है और उसमें अलग-अलग लेखक शामिल हैं, तो इसे एक समुच्चय माना जा सकता है। यदि नहीं, तो यह एक समुच्चय नहीं हो सकता है।

(iv) दुनिया के ग्यारह सबसे प्रसिद्ध फुटबॉल खिलाड़ियों की एक टीम—(iii) के समान, यह एक समुच्चय है या नहीं यह इस बात पर निर्भर करता है कि ग्यारह सबसे प्रसिद्ध फुटबॉल खिलाड़ियों की एक विशिष्ट, सहमत सूची है या नहीं। यदि ऐसी कोई सूची मौजूद है और उसमें अलग-अलग खिलाड़ी हैं, तो इसे एक समुच्चय माना जा सकता है। यदि नहीं, तो यह एक समुच्चय नहीं हो सकता है।

(v) {1, 2, 2, 3}—यह एक समुच्चय नहीं है, क्योंकि इसमें द्वैत तत्व शामिल हैं (संख्या 2 दो बार दिखाई देती है)। समुच्चय में द्वैत तत्व नहीं हो सकते।

(vi) {1, 2, [2, 3], 3}—यह एक समुच्चय नहीं है, क्योंकि इसमें एक नेस्टेड सेट ({2, 3}) शामिल है। सेट में आमतौर पर व्यक्तिगत, गैर-नेस्टेड तत्व शामिल होते हैं। यदि आप नेस्टेड समुच्चय को हटाते हैं, तो आपके पास {1, 2, 3} होता है, जो एक वैध समुच्चय है।

4 / NEERAJ : परिमाणत्मक विधियाँ

प्रश्न 2. निम्नलिखित सदस्यों वाले प्रत्येक सेट के लिए, इसे रोस्टर/सारणीबद्ध रूप में और इसकी गणनीयता में लिखें—

(क) 180 के धनात्मक अभाज्य पूर्णांक गुणनखंड

(ख) द्विघात समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ का हल।

उत्तर—(क) 180 के सकारात्मक अभाज्य पूर्णांक गुणनखंड—180 के अभाज्य गुणनखंड 2, 3 और 5 हैं। हम सकारात्मक अभाज्य पूर्णांक गुणनखंडों की तलाश कर रहे हैं, इसलिए समुच्चय को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है—{2, 3, 5}

इस समुच्चय की गणनीयता इसमें तत्वों की संख्या है, जो 3 है, इसलिए गणनीयता 3 है।

(ख) द्विघात समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ का हल—समाधान खोजने के लिए, हम समीकरण को हल कर सकते हैं— $x^2 - 3x - 10 = 0$

समीकरण का गुणनखंडन— $(x - 5)(x + 2) = 0$

प्रत्येक कारक को शून्य के बराबर सेट करना— $x - 5 = 0 = > x = 5, x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

समीकरण के हल $x = 5$ और $x = -2$ हैं।

समाधानों के समुच्चय को रोस्टर रूप में प्रस्तुत करना—{5, -2}

इस समुच्चय की गणनीयता 2 है, क्योंकि इसमें दो तत्व हैं, तो गणनीयता 2 है।

प्रश्न 3. बताएं कि निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय है और यदि यह समुच्चय है तो

(i) इसे समुच्चय निर्माण रूप में लिखें।

(ii) इसकी गणनीयता बताएं।

(क) {6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27}

(ख) {2, 4, 8, 16, ...}

(ग) {{1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, ..., {1, 2, 3, 4...10}}

उत्तर—(क) {6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27}—यह एक समुच्चय है, क्योंकि इसमें अलग-अलग तत्व शामिल हैं। यह 6 से शुरू होकर 3 के धनात्मक गुणजों के एक समूह का प्रतिनिधित्व करता है।

(i) समुच्चय निर्माण करें— $[x | x \text{ 3 का धनात्मक गुणज है}]$

(ii) गणनीयता: इस समुच्चय में 8 तत्व हैं, इसलिए गणनीयता 8 है।

(ख) {2, 4, 8, 16, ...}—यह एक समुच्चय है। यह एक ज्यामितीय अनुक्रम का प्रतिनिधित्व करता है, जहां प्रत्येक तत्व की शक्ति 2 है।

(i) समुच्चय निर्माण करें— $\{2^n | n \text{ एक गैर-ऋणात्मक पूर्णांक है}\}$

(ii) गणनीयता—इस समुच्चय में अनंत रूप से कई तत्व शामिल हैं, क्योंकि इसमें 2 की सभी शक्तियां शामिल हैं, इसलिए गणनीयता अनंत (∞) है।

(ग) {{1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, ..., {1, 2, 3, 4...10}}—यह समुच्चयों का एक समूह प्रतीत होता है, जहां प्रत्येक समुच्चय में 1 से लेकर कुछ धनात्मक पूर्णांक तक की संख्याएँ होती हैं।

(i) समुच्चय निर्माण करें— $\{S \text{ एक समुच्चय है, जिसमें 1 से } n \text{ तक की संख्याएँ हैं, जहां } n \text{ एक धनात्मक पूर्णांक है}\}$

(ii) गणनीयता—इस समुच्चय में अनंत रूप से कई समुच्चय होते हैं, क्योंकि इसमें 1 से लेकर विभिन्न सकारात्मक पूर्णांक तक

की संख्या वाले समुच्चय शामिल होते हैं, इसलिए गणनीयता अनंत (∞) होती है।

प्रश्न 4. समुच्चय X और Y की जोड़ी के लिए, अपनी प्रतिक्रिया के स्पष्टीकरण के साथ बताएं कि $X = Y$ है या नहीं।

(i) $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Y = \{x : x \text{ धनात्मक सम पूर्णांक है और } x < 10\}$

(ii) $X = \{x : x, 10 \text{ का गुणज है}\}$, $Y = \{10, 15, 20, 25, 30A \dots\}$

(iii) $X = \{2, 3\}$, $Y = \{x : x, x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ का हल है}\}$

(iv) $X = \{x : x, \text{ FOLLOW शब्द में एक अक्षर है}\}$, $Y = \{y : y, \text{ WOLF शब्द में एक अक्षर है}\}$

उत्तर—(i) $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $Y = \{x : x \text{ एक धनात्मक सम पूर्णांक है और } x \leq 10\}$ —X, 2 से 10 तक धनात्मक सम पूर्णाकों का समुच्चय है, और Y को 10 से कम या उसके बराबर धनात्मक सम पूर्णाकों के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया गया है। दोनों समुच्चयों में समान तत्व हैं, इसलिए $X = Y$

(ii) $X = \{x : x, 10 \text{ का गुणज है}\}$, $Y = \{10, 15, 20, 25, 30\}$

X, 10 के गुणजों का समुच्चय है, और Y को संख्याओं {10, 15, 20, 25, 30,} के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया गया है, जहां प्रत्येक तत्व 5 का गुणज है। X और Y समान नहीं हैं, क्योंकि X में केवल गुणज हैं 10 का, जबकि Y में 5 का गुणज है और जरूरी नहीं कि 10 का भी गुणज हो।

(iii) $X = \{2, 3\}$, $Y = \{x : x, x^2 + 5x + 6 = 0\}$ का एक समाधान है—X एक समुच्चय है, जिसमें संख्याएँ 2 और 3 हैं। Y घातांक समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ का समुच्चय है। हल प्राप्त करने के लिए हमें समीकरण के मूल प्राप्त करने होंगे। प्रत्येक कारक को शून्य के बराबर सेट करना : $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

तो, समीकरण के समाधान $x = -2$ और $x = -3$ हैं, जो समुच्चय X में नहीं हैं।

(iv) $X = \{x : x, \text{ FOLLOW का एक अक्षर है}\}$, $Y = \{y : y, \text{ WOLF का एक अक्षर है}\}$ —X शब्द "FOLLOW" में अक्षरों का समूह है, जो कि {F, O, L, L, O, W} है। Y शब्द "WOLF" में अक्षरों का समूह है, जो कि {W, O, L, F} है। X और Y समान नहीं हैं, क्योंकि उनमें अलग-अलग अक्षर हैं।

प्रश्न 5. निम्नलिखित समुच्चयों X और Y के लिए $X \subseteq Y, Y \subseteq X, X \subset Y, Y \subset X$ या $X \not\subseteq Y$ आदि का सही संबंध ज्ञात कीजिए—

(i) $X = \{x : x \text{ IGNOU में नामांकित विद्यार्थी है और उसके पास अर्थशास्त्र के रूप में एक विषय है}\}$, $Y = \{x : x \text{ } n \text{ IGNOU में नामांकित विद्यार्थी है}\}$

(ii) $X = \{x : x \text{ किसी पटल पर एक त्रिभुज है}\}$, $Y = \{x : x \text{ किसी पटल पर एक त्रिभुज है}\}$, $Y = \{x : x \text{ समतल में एक आयत है}\}$

(iii) $X = \{x : x \text{ एक सम प्राकृतिक संख्या है}\}$, $Y = \{x : x \text{ एक पूर्णांक है}\}$